Serie 2

1. Sei $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ der Vektorraum der Polynomen vom Grad ≤ 1 und seien

$$\mathcal{B} \; = \; \{b_1, b_2\} := \{x+1, 1\} \qquad \tilde{\mathcal{B}} \; = \; \{\tilde{b_1}, \tilde{b_2}\} = \{x-1, x+1\}$$

Basen von V.

a) Stelle die Vektoren $\tilde{b_i}$ in den Koordinaten von $\mathcal{B}$ dar, und bestimme die Transformationsmatrix $L = L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$ sodass $(\tilde{b_1}\ \tilde{b_2}) = (b_1\ b_2)L$.

b) Betrachte die Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\} := \{1, x\}$ von V und bestimme $(\tilde{b_1}\ \tilde{b_2})$ bzw. $(b_1\ b_2)$ in den Koordinaten von $\mathcal{E}$. Wie kann man jetzt die Matrix L von Teilaufgabe a) zurückfinden ?

2. Seien $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonalen Projektionen auf die Ebene

$$E_1 : x + 2y = 3z \quad \textit{bzw.} \quad E_2 : x = -y.$$

a) Gebe die Matrix von $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ bzw. $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ an.

b) Finde für $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ eine orthogonal Basis von $\mathbb{R}^3$, so dass die jeweilige Matrixdarstellung der Abbildung bezüglich dieser Basis Diagonalgestalt hat.

3. Betrachte $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Multiplikation mit einem Element $z = s + it \in \mathbb{C}$ definiert eine lineare Abbildung $\psi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \psi_z(w) = zw = (s+it)(u+iv)$. Gebe die Matrixdarstellung von ψ_z bezüglich der Standardbasis $\{1, i\}$ und bezüglich $\{e^{i\vartheta}, e^{i(\vartheta+\pi/2)}\}$ an, wobei $\vartheta \in [0, 2\pi)$ fest ist.

4. **a)** Schreibe die Koordinaten der folgenden Ausdrücke mittels der Einsteinschen Summenkonvention. Dabei seien x,y (Spalten-)Vektoren und A,B Matrizen.

- $x^T y$
- $x^T A y$
- $(B^T x)^T A$

b) Sei $A_{ij} = i - j$. Zeige, dass $A_{ij} x^i x^j = 0$ gilt.

c) Welche Ausdrücke machen Sinn?

- $L^{ij} K_{ij} = B^m$
- $M_{nm} W^{nm} = N$
- $L^{ij} \Gamma_{jk} = A^i_j$
- $A^{ijk}_{lmn} B^{abc} = C$

d) Schreibe folgende Ausdrücke explizit aus! δ bezeichnet wie immer das Kronecker Symbol.

- $\delta^i_j a^j$
- $\delta_{ij} x^i x^j$
- δ^i_i
- $\frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j$