Serie 3

1. Sei V der reelle Vektorraum aller 2×2-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Man schreibe $\mathcal{T} : A \mapsto A^T$ für die lineare Abbildung die durch Transposition einer Matrix definiert ist. Sei

$$\mathcal{E} = \{m_1, m_2, m_3, m_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

die Standardbasis von V und

$$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

eine weitere Basis.

a) Berechne $[\mathcal{T}]_{\mathcal{E}}$ und $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}}$.

b) Sei $[v]_{\mathcal{E}} = (1,2,3,4)^T$ und $[w]_{\mathcal{B}} = (1,0,0,1)^T$. Berechne $[\mathcal{T}v]_{\mathcal{E}}$ und $[\mathcal{T}w]_{\mathcal{B}}$!

2. Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

v_1, v_2, v_3 definieren eine Basis $\mathcal{B}$. Bestimme die Koordinatenvektoren $[\beta^i]_{\mathcal{E}^*}$ der Dualbasis $\{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ von $\mathcal{B}$ bezüglich der Basis $\mathcal{E}^* = \{\varepsilon^i\}$ von $(\mathbb{R}^3)^*$ definiert durch $\varepsilon^i(x) = x^i$ für $x = (x^1, x^2, x^3)^T \in \mathbb{R}^3$.

3. Bezeichne $V = \mathbb{R}[X]_2$ den Vektorraum der reellen Polynome vom Grade kleiner gleich 2. Definiere folgende Linearformen auf V,

$$\beta^1: \begin{array}{l} V \to \mathbb{R} \\ p \mapsto p(0) \end{array} \qquad \beta^2: \begin{array}{l} V \to \mathbb{R} \\ p \mapsto p'(0) \end{array} \qquad \beta^3: \begin{array}{l} V \to \mathbb{R} \\ p \mapsto \frac{1}{2}p''(0) \end{array}$$

a) Bestimme die Basis $\mathcal{B}$ von V welche $\mathcal{B}^* = \{\beta^1, \beta^2, \beta^3\}$ als zugehörige Dualbasis besitzt.

b) Gegeben sei eine weitere Form $\omega \in V^*$,

$$\omega: \begin{array}{l} V \to \mathbb{R} \\ p \mapsto \int_0^1 p(y)dy. \end{array}$$

Bestimme den Koordinatenvektor $[\omega]_{\mathcal{B}^*}$ von ω bezüglich $\mathcal{B}^*$.

c) Sei $\mathcal{A} = \{x, x+1, x^2-1\}$ eine weitere Basis von V. Bestimme die Dualbasis $\mathcal{A}^*$.

d) Bestimme die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}^*$ nach $\mathcal{A}^*$ (Sei vorsichtig, diese nicht mit der Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{A}$ zu verwechseln!)

Bitte wenden!

e) Gebe $[\omega]_{\mathcal{A}^*}$ an.

4. Gegeben seien die Vektoren

$$\mathcal{B} \;=\; \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zeige das $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ definiert und berechne die Dualbasis bezüglich $\mathcal{B}$ von $(\mathbb{R}^3)^*$.

5. Sei $V < \mathbb{R}^3$ der Teilvektorraum von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Punkten $(x^1, x^2, x^3)^T$ (bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$), so dass

$$x^1 + x^2 + x^3 = 0.$$

a) Zeige, dass V ein Vektorraum von Dimension 2 ist.

b) Seien $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ und $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$ wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \tilde{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zwei Basen von V. Berechne die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$.

c) Sei $b_3 = (1, 0, 0)^T$. Wir erweitern $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ zu Basen von $\mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{B}_3 = \{b_1, b_2, b_3\} \quad \tilde{\mathcal{B}}_3 = \{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, b_3\}.$$

Die Dualbasis bezüglich $\mathcal{B}_3$ und $\tilde{\mathcal{B}}_3$ definieren auch eine Dualbasis $\mathcal{B}^*$ respektive $\tilde{\mathcal{B}}^*$ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ von V^*. Gebe diese bezüglich den Koordinatenformen von $\mathbb{R}^3$ an!