Serie 4

1. Sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ das Spatprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\varphi(u, v, w) = u \bullet (v \times w).$$

a) Prüfe, dass φ eine Trilinearform ist.

b) Zeige, dass

$$\varphi(u, v, w) = \det \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}.$$

c) Allgemeiner, definiert die Determinantenabbildung

$$(v_1, \ldots, v_m) \mapsto \det \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_m \end{bmatrix}$$

eine m-Form auf $\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m$?

2. Sei g ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^2$ mit Koordinatenmatrix

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ definiert durch $G_{ij} = g_{ij} = g(e_i, e_j)$. Das Spektraltheorem besagt, dass eine Basis $\mathcal{A} = \{a_1, a_2\}$ aus Eigenvektoren von G existiert. Wir wollen diese explizit finden.

a) Die Eigenwerte von G sind die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms*

$$p_G(\lambda) = \det (G - \lambda \mathbb{1}),$$

wobei $\lambda \mathbb{1}$ die Diagonalmatrix $\left[\begin{smallmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{smallmatrix}\right]$ bezeichne. Bestimme die Nullstellen λ_1 und λ_2!

b) Da der Eigenvektor $a_i = (a_i^1, a_i^2)^T$ zum Eigenwert λ_i die Gleichung $Ga_i = \lambda_i a_i$ erfüllen muss, bekommen wir ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} g_{11} a_i^1 + g_{12} a_i^2 &= \lambda_i a_i^1 \\ g_{21} a_i^1 + g_{22} a_i^2 &= \lambda_i a_i^2. \end{aligned}$$

Löse dieses für $i = 1, 2$.

c) Zeige, dass g nach geeignerer Normierung der Basis $\mathcal{A}$ die Koordinatenmatrix von g bezüglich $\mathcal{A}$ die Gestalt $\mathbb{1} = (\delta_{ij})$ hat.

3. Gegeben sei eine Basis des $\mathbb{R}^3$ durch

$$\mathcal{B} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

bezüglich der ein inneres Produkt g orthonormal ist.

Bitte wenden!

a) Bestimme die Koordinaten von g bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ des $\mathbb{R}^3$!

b) Sei $v \in \mathbb{R}^3$ gegeben durch $[v]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T$. Zeige, dass $\|v\|^2 = g(v, v)$ unabhängig von der Wahl der Basis ist.

4. Sei $V = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen $n \times n$ Matrizen und betrachte die Linearform

$$\begin{aligned} \mathrm{Spur}: \quad & V \to \mathbb{R} \\ & m \mapsto \mathrm{Spur}(m) = m^i_i. \end{aligned}$$

Die Spur beschreibt auch eine Bilinearform auf $V \times V$ für $V = \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R})$ wie folgt:

$$\mathrm{Spur}_{Bil}(A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(A^T B)$$

wobei A^T die Transpositionsmatrix von A ist.

a) Zeige, dass Spur_{Bil} bilinear und symmetrisch ist, d.h. $\mathrm{Spur}_{Bil}(A, B) = \mathrm{Spur}_{Bil}(B, A)$.

b) Sei $n = 2$. Für $\alpha, \beta \leq 2$ bezeichne $E_{\alpha\beta}$ die Elementarmatrix definiert durch $(E_{\alpha\beta})^j_i = \delta_{i\alpha}\delta^{\beta j}$, also jene Matrix, die den Eintrag 1 in der (α, β)-Koordinate trägt und sonst nur Nullen hat. Dann definiert $\mathcal{E} = \{E_{\alpha\beta}\}$ die Standardbasis von V. Gebe die Darstellungsmatrix von Spur_{Bil} bezüglich $\mathcal{E}^*$ an.

c) Betrachte die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ von V, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Koordinatenmatrix von $\mathrm{Spur}_{\mathrm{Bil}}$ bezüglich $\mathcal{B}^*$.