Serie 5

1. Sei

$$\mathcal{A} = \left\{ a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und g ein inneres Produkt bezüglich dem $\mathcal{A}$ orthonormal ist.

a) Bestimme den metrischen Tensor g_{ij} bezüglich $\mathcal{A}$ respektive $\widetilde{g}_{ij}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

b) Gebe die zu $\mathcal{E}$ und $\mathcal{A}$ reziproken Basen bezüglich g an.

c) Sei $v = (3, 1, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ bestimme die ko- und kontravarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{E}$ und $\mathcal{A}$.

2. Sei $V = \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ der Raum der affinen Funktionen der Form $x \mapsto ax + b$ und betrachte folgende Abbildung:

$$g : V \times V \to \mathbb{R} \qquad (p, q) \mapsto g(p, q) = \int_0^1 xp(x)q(x)dx.$$

Sei weiter $\mathcal{B}_{a,b,c} = \{ax + b, c\}$ (wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \neq c$) eine Basis von V.

a) Verifiziere, dass g ein Skalarprodukt ist.

b) Bestimme die Koordinaten von g bezüglich der Basen $\mathcal{F} = \mathcal{B}_{2,0,1}$ und $\mathcal{B}_{a,b,c}$.

c) Berechne die reziproke Basis $\mathcal{F}^g$ von $\mathcal{F}$ bezüglich g.

d) Kann die Basis $\mathcal{F}$ so normalisiert werden, dass sie bezüglich g orthogonal ist?

e) Bestimme die kontra- und kovarianten Koordinaten von $x + 1$ bezüglich $\mathcal{F}$.

f) Seien nun $a = 2$, $b = 1$ und $c = 1$ und $\alpha : p \mapsto \int_0^1 p(x)dx$. Berechne die Koordinaten von α bezüglich $\mathcal{B}^*_{2,1,1}$.

3. Es sei V der euklidische Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 mit dem inneren Produkt

$$g(p, q) := \int_0^1 p(t)\, q(t)\, dt\,.$$

Das lineare Funktional $\phi_{t_0} : V \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $\phi_{t_0}\big(p\big) := p(t_0)$, wobei t_0 eine feste reelle Zahl ist.

a) Sei $\mathcal{B}^*$ die Dualbasis von V^* bezüglich $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$. Gebe die Koordinaten von ϕ_{t_0} bezüglich $\mathcal{B}^*$ an.

b) Finde ein Polynom $r \in V$ so, dass für alle $p \in V$ gilt $\phi_{t_0}\big(p\big) = g(p, r)$. Gebe die Koordinaten von r bezüglich der reziproken Basis $\mathcal{B}^g$ von $\mathcal{B}$ bezüglich g an.