Serie 6

1. (Prüfungsfrage, Sommer 2014) Sei $V = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) : A = A^*\}$ der Vektorraum der hermitischen Matrizen über $\mathbb{R}$. Hier ist für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ die Matrix A^* definiert durch

$$A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{21} \\ \overline{a}_{12} & \overline{a}_{22} \end{pmatrix}$$

wobei $\overline{a}$ die in $\mathbb{C}$ konjugierte Zahl zu a ist. Definiere die folgende Bilinearform g

$$g : V \times V \to \mathbb{C} \qquad g(A, B) = \mathrm{Spur}(B^* A).$$

Seien weiter folgende Elemente von V gegeben:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige, dass $\mathcal{S} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ eine Basis von V bildet.

b) Zeige, dass g ein (reellwertiges!) Skalarprodukt definiert und bestimme die Koordinaten der Darstellungsmatrix g_{ij} von g bezüglich $\mathcal{S}$.

c) Berechne die reziproke Basis von $\mathcal{S}$ bezüglich g.

d) Definiere die Transpositionsabbildung $\psi : V \to V$ durch

$$\psi : A \mapsto A^T.$$

Gebe die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\mathcal{S}$ an!

e) Sei eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit Matrixdarstellung bezüglich $\mathcal{S}$ gegeben durch

$$[\varphi]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Gebe Eigenwerte und eine Eigenbasis $\mathcal{T}$ von φ an. Bestimme die Darstellungsmatrix $\tilde{g}_{ij}$ von g bezüglich dieser Basis.

f) Gebe den kovarianten Koordinatenvektor von $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ bezüglich $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ an.

Bemerkung: Mit Ausnahme von c) und f) können die Teilaufgaben unabhängig voneinander gelöst werden.

2. Sei V ein Vektorraum der Dimension N. Seien $\mathcal{B}$ und $\widetilde{\mathcal{B}}$ Basen von V und sei L die Transformationsmatrix von der Basis $\mathcal{B}$ zu $\widetilde{\mathcal{B}}$. Sei $\Lambda = L^{-1}$.

a) Sei T ein Tensor vom Typ $(2,3)$ mit Koordinaten T^{ij}_{klm} respektive $\widetilde{T}^{ij}_{klm}$ bezüglich $\mathcal{B}$ respektive $\widetilde{\mathcal{B}}$. Beschreibe den Zusammenhang zwischen den eben genannten Koordinaten in der Einstein-Summenkonvention.

Wie ist das Transformationsverhalten, falls T den Typ $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ resp. $(1,3)$ hat?

b) Welche der folgenden indizierten Grossen Q, R, S, T besitzen das Transformationsverhalten eines Tensors? Bestimme gegebenenfalls den Typ des Tensors.

$$\widetilde{Q}^{ij} = \Lambda^i_m \Lambda^j_n Q^{jn}, \quad \widetilde{R}^{ijk} = \Lambda^i_q \Lambda^j_r \Lambda^k_s R^{qrs}, \quad L^q_i \Lambda^k_s \widetilde{S}^{ij}_k = \Lambda^j_r S^{qr}_s, \quad \widetilde{T}^i_j = \Lambda^i_j L^r_k T^r_k.$$

c) Sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix A (bezüglich $\mathcal{B}$) resp. $\widetilde{A}$ (bezüglich $\widetilde{\mathcal{B}}$). Sei A_{ij} resp. $\widetilde{A}_{ij}$ die entsprechenden Koordinaten. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

$$\widetilde{A}_{ij} = L^k_i L^l_j A_{kl}, \qquad \widetilde{A}_{ij} = \sum_{k,l=1}^{N} \Lambda^i_k L^l_j A_{kl}, \qquad \widetilde{A}_{ij} = \Lambda^k_i \Lambda^l_j A_{kl}$$

Begründe deine Antwort.

3. (Prüfungsfrage, Sommer 2012) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\mathcal{B} = \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Sei

$$T : V \times V \times V \times V \to \mathbb{R}$$

eine *symmetrische* Multilinearform (d.h. $T_{ijkl} = T_{\pi(ijkl)}$ für jede Indizenpermutation π) die eine gewisse Materialeigenschaft beschreibt.

a) Wie viele unabhängige Koordinaten T_{ijkl} besitzt eine symmetrische Multilinearform wie oben im allgemeinen? Was für ein Typ Tensor ist T? Gib auch dessen Transformationsverhalten unter Basiswechsel an (wobei L die Matrix des Basiswechsel zu einer neuen Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ sei).

b) Das Material besitze nun gewisse Symmetrien. Die von T beschriebene Materialeigenschaft bleibt erhalten unter der Spiegelung $\mathcal{S}$ an der Gerade $x^1 = 0$:

$$\left(x^1, x^2\right) \mapsto \left(-x^1, x^2\right).$$

Bestimme die Darstellungsmatrix M dieser Spiegelung bezüglich $\mathcal{B}$ und zeige, dass dann gilt:

$$T_{1222} = 0 \quad \text{und} \quad T_{1112} = 0.$$

c) Wir nehmen nun an, dass

$$T(e_1, e_1, e_1, e_1) = 3, \qquad T(e_2, e_2, e_2, e_2) = 4, \qquad T(e_1, e_1, e_2, e_2) = 5.$$

Bestimme

$$T(e_1, e_2, e_1 + e_2, 7e_1 - e_2).$$

d) Gegeben sei folgender $(2,0)$-Tensor:

$$U : V^* \times V^* \to \mathbb{R}, \qquad (\alpha, \gamma) \ \mapsto \ U(\alpha, \gamma) := T(e_1, e_2, \alpha(e_1)e_1, \gamma(e_2)e_2).$$

Das heisst $U = U^{ij} b_i \otimes b_j$. Bestimme die Koordinaten von U, also $U^{ij} = U(\beta^i, \beta^j)$, wobei $\mathcal{B}^* = \left(\beta^1, \beta^2\right)$ die Dualbasis von $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ ist.

4. Wir bezeichnen einen Spannungstensor σ als Scherungsdeformation (shear deformation) wenn dessen Spur gleich 0 ist. Wir bezeichnen σ als hydrostatischen Druck, falls dessen Hauptspannungen alle gleich sind.

a) Sei $\mathcal{B} = \{e^1, e^2, e^3\}$ eine Orthonormalbasis. Ein Spannungstensor sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben:

$$(\sigma^{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Hauptspannungen und Hauptspannungsrichtungen von σ.

b) Schreibe den obigen Spannungstensor als Summe einer Scherungsdeformation σ_S und eines hydrostatischen Drucks σ_P.