Ferienserie

1. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und definiere das Kreuzprodukt (bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_3)) wie folgt:

$$V \times V \to V \qquad (u, v) \mapsto u \times v = \begin{pmatrix} u^2v^3 - u^3v^2 \\ u^3v^1 - u^1v^3 \\ u^1v^2 - u^2v^1 \end{pmatrix}.$$

Das Levi–Civita Symbol ist bezüglich der Standardbasis wie folgt definiert:

$$\varepsilon_{ij}^k = (e_i \times e_j)^k$$

für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

a) Berechne ε_{ij}^k.

b) Zeige, dass $\times$ eine bilineare Abbildung ist.

c) Überprüfe, dass $(u \times v)^k = \varepsilon_{ij}^k u^i v^j$.

d) Wir können den $(1, 2)$-Tensor ε_{ij}^k auch als $(0, 3)$-Tensor betrachten in dem wir $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ij}^k \delta_{kl}$ definieren. Zeige, dass

1. $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$
2. $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{kji}$
3. $u \times v = -v \times u$ für $u, v \in \mathbb{R}^3$.

e) Definiere analog wie oben $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$ und sei A ein $(1, 1)$-Tensor in $\mathbb{R}^3$. Zeige, dass

$$\det A = \varepsilon^{ijk} A_i^1 A_j^2 A_k^3.$$

f) Prüfe folgende Identität:

$$(v \otimes w) \bullet (x \otimes y) = \det \begin{pmatrix} v \bullet x & v \bullet y \\ w \bullet x & w \bullet y \end{pmatrix}$$

d.h.

$$(v \times w)^k \delta_{kl} (x \times y)^l = \delta_{kl}\delta_{mn} v^k x^l w^m y^n - \delta_{ml}\delta_{kn} v^k x^l w^m y^n.$$

2. Sei V ein Vektorraum mit inneres Produkt g. Der Raum der orthogonalen Transformationen ist definiert durch

$$\mathrm{O}(g) = \{f : V \to V \text{ linear} : g(f(v), f(w)) = g(v, w)\}.$$

a) Wähle eine Basis $\mathcal{B}$ von V. Sei A_f die Matrix von $f : V \to V$ bezüglich $\mathcal{B}$. Was ist die Bedingung an A_f, so dass $f \in \mathrm{O}(g)$? Verifiziere insbesondere, dass wenn $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von g ist, dann $A_f^T = A_f^{-1}$.

Bitte wenden!

b) Betrachte $V = \mathbb{R}^2$ mit Skalarprodukt g mit einer zu g orthonormale Basis $\mathcal{B}$. Sei I_2 die 2×2 -Einheitsmatrix und $[u]_\mathcal{B} = (u^1, u^2)^T = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})^T$. Für welche Werte des Parameters α ist die lineare Transformation definiert durch die Matrix $M := I_2 - \alpha u u^T$ orthogonal?

c) Sei jetzt V der euklidische Raum der reellen 2×2-Matrizen mit dem inneren Produkt

$$g(A, B) = \operatorname{tr}(A^T B).$$

Für $u \in \mathbb{R}$, sei die lineare Abbildung $F_u : V \to V$ definiert durch

$$F_u(A) = A^T - u \cdot (\operatorname{tr} A) I_{2\times 2}$$

Für welche $u \in \mathbb{R}$ ist F_u orthogonal bezüglich g?

3. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und g eine Bilinearform definiert durch (in einer Basis $\mathcal{B}$)

$$g(v, w) = [v]_\mathcal{B}^T A [w]_\mathcal{B}$$

für eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ a_1 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Sei

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine zweite Basis.

a) Für welche Werte $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ist g ein Skalarprodukt?

b) Bestimme die Matrix zum Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$.

c) Sei nun $a_1 = 5$ und $a_2 = 3$. Bestimme die reziproke Basis von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ bezüglich g.

d) Sei $v \in V$ mit $[v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T$. Berechne die kovarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

4. **(Prüfungsfrage, Winter 2011)** Sei $\mathcal{F} : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ wie folgt gegeben

$$\mathcal{F}(p(x)) = p(x) - x \left(\frac{\partial}{\partial x} p(x) \right)$$

Sei $q(x) = 1 - x$.

a) Sei folgende Basis $\mathcal{B}$ gegeben $b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = 1 - x^2, b_4 = 1 - x^3$. Bestimme den Koordinatenvektor von $q(x)$ und die Darstellungsmatrix $[\mathcal{F}]_\mathcal{B}$ von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{B}$.

b) Sei folgende Basis $\mathcal{B}'$ gegeben: $b'_1 = 1$, $b'_2 = 1 + x$, $b'_3 = 1 + x + x^2$, $b'_4 = 1 + x + x^2 + x^3$. Bestimme den Koordinatenvektor von $q(x)$ und die Darstellungsmatrix $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'}$ von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{B}'$.

c) Berechne die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$. Was ist der Zusammenhang zwischen $[\mathcal{F}]_\mathcal{B}$ und $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'}$? Schrieb dies auch in Einstein-Summenkonvention.

Siehe nächste Seite!

d) Bestimme eine Eigenbasis für $\mathcal{F}$ und berechne die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich dieser Eigenbasis.

5. (Prüfungsfrage Sommer 2014) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Basis $\mathcal{B}$ und einer weiteren Basis $\widetilde{\mathcal{B}}$. Sei $L = L_{\widetilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}}$ die Transformationsmatrix von der Basis $\mathcal{B}$ nach $\widetilde{\mathcal{B}}$ und setze $\Lambda = L^{-1}$. Sei $B : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, $f : V \to V$ eine lineare Transformation und schliesslich $\alpha : V \to \mathbb{R}$ eine Linearform.

a) Definiere die Tensoren $A : (v, w) \mapsto B(f(v), w)$, $g : v \mapsto \alpha(f(v))$ (für $v, w \in V$) und $T = A \otimes f$. Bestimme den Typ der Tensoren B, f, A, g und T. Schreibe das Transformationsverhalten dieser Tensoren bezüglich des Basiswechsels $\mathcal{B}$ nach $\widetilde{\mathcal{B}}$ in der Einsteinschen Summenkonvention auf.

b) Wir nehmen jetzt an, dass V 2-dimensional ist und betrachten den Unterraum $\mathcal{W}$ der $(2,2)$-Tensoren $\mathcal{T}_2^2(V)$ mit der Symmetrie $W^{ij}_{kl} = W^{ji}_{lk}$ für alle $W \in \mathcal{W}$. Bestimme die Dimension von $\mathcal{W}$!

6. (Prüfungsfrage Sommer 2012) Sei $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von $V = \mathbb{R}^3$. Gegeben sei ein Material unter Spannung. Der Verzerrungstensor ε sei bezüglich dieser Basis wie folgt gegeben:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme die Hauptkoeffizienten von ε.

b) Bestimme eine Orthonormalbasis von $V = \mathbb{R}^3$ bezüglich derer ε durch eine Diagonalmatrix beschrieben wird.

c) Schreibe den Verzerrungstensor ε als Summe eine Scherungsdeformation ε^S und einer gleichmässigen Kompression ε^K.

d) Der Elastizitätstensor E des Materials sei bezüglich $\mathcal{B}$ wie folgt gegeben

$$E^{ijkl} = i + j + k + l - 4$$

Bestimme den Spannungstensor σ bezüglich $\mathcal{B}$ ($\sigma^{ij} = E^{ijkl}\varepsilon_{kl}$).