Lösungen 1

1. Wir bezeichnen mit A die Matrixdarstellung von ψ und mit L die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\tilde{\mathcal{B}}$. Die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$ lässt sich ausdrücken durch $L^{-1}AL$. Wir berechnen daher L und L^{-1} und erhalten

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Somit ist

$$L^{-1}AL = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & -3 \\ 7 & 11 & -7 \end{bmatrix}.$$

2. Wir bezeichnen hier auch mit A die Matrixdarstellung von ψ.

a) Die standard Matrixdarstellung von ψ ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Sei $\vec{x} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^3$. Dann hat $\psi(\vec{x}) = -a_1(\vec{v_1} \times \vec{v_2}) + a_3\vec{v_1}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ Koordinatenvektor $(a_3, 0, -a_1)^T$ und $A = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ -1 & & \end{pmatrix}$.

3. a) Wir definieren die Matrix $B := (b_1\ b_2\ b_3)$, wobei b_1, b_2, b_3 die Koordinatendarstellungen der Basisvektoren von $\mathcal{B}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ sind, die in der Aufgabenstellung explizit gegeben werden, und definieren analog die Matrix $\tilde{B}$ bezüglich den Vektoren von $\tilde{\mathcal{B}}$. Die Transformationsmatrix L von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ ist dann bestimmt durch

$$B = EL,$$

wobei E die Identitätsmatrix bezeichne. Folglich ist $L = B$. Wir berechnen ihre Inverse und erhalten

$$L^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 & -5 & -15 \\ 21 & -7 & -30 \\ 29 & -8 & -40 \end{bmatrix}.$$

Bitte wenden!

Die Gleichung $[v]_{\mathcal{B}} = L^{-1}(-24, 8, 19)^T$ liefert schliesslich $[v]_{\mathcal{B}} = (-113, -226, -304)^T$. Wir berechnen nun die Transformationsmatrix $L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$ von $\tilde{\mathcal{B}}$ nach $\mathcal{B}$, die wir nicht nur hier, sondern auch im zweiten Aufgabenteil gebrauchen können. Diese ist bestimmt durch

$$\tilde{B} = BL_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}},$$

oder explizit $L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} = B^{-1}\tilde{B}$. Wir rechnen weiter und erhalten

$$L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 10 & -5 & -15 \\ 21 & -7 & -30 \\ 29 & -8 & -40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

und

$$L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Folglich ist

$$[v]_{\tilde{\mathcal{B}}} = L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}^{-1}[v]_{\mathcal{B}} = (35, -43, 35)^T.$$

b) Es ist $[w]_{\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}[w]_{\tilde{\mathcal{B}}} = L_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}(1, 2, 3)^T = (-6, -10, -11)$.

4. **a)** Diese Gleichung hat bekanntlich zwei unabhängige Lösungen, $e^{\pm ix}$. Es ist auch klar, dass $\alpha e^{ix} + \beta e^{-\alpha x}$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, auch Lösungen der Gleichung sind. Somit ist V genau der Vektorraum, das von dieser zwei Lösungen gespannt wird.

b) Nehme (e^{ix}, e^{-ix}) als Basis von V.

c) $(\cos x, \sin x)$ bildet eine Basis über $\mathbb{R}$.

d) Wir wissen dass $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ und damit $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. Also hat g bezüglich der Basis aus b) Koordinatenvektor $(0, 1)^T + \frac{1}{2i}(1, -1)^T$.