Lösungen 2

1. a) Es gilt $\tilde{b_1} := x - 1 = L_1^1(x+1) + L_1^2 1 = L_1^1 x + (L_1^1 + L_1^2)1$, d.h. $L_1^1 = 1$ und $L_1^2 = -2$, und $\tilde{b_2} := x + 1 = b_1$ (also $L_2^1 = 1$ und $L_2^2 = 0$). Dann ist

$$L = \begin{bmatrix} L_1^1 & L_2^1 \\ L_1^2 & L_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Prüfe dass $(\tilde{b_1}\ \tilde{b_2}) = (b_1\ b_2)L$.)

b) Es gilt $\tilde{b_1} = x - 1 = e_2 - e_1$, $\tilde{b_2} = e_2 + e_1 = b_1$ und $b_2 = e_1$. Also $L_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ und $L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Die Gleichung $(\tilde{b_1}\ \tilde{b_2}) = (b_1\ b_2)L$ lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} (\tilde{b_1}\ \tilde{b_2}) &= (e_1\ e_2)L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{E}} \\ &= (b_1\ b_2)L_{\mathcal{B}\mathcal{E}}^{-1}L_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{E}} \\ &= (b_1\ b_2)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. a) Für die Ebene E_1 betrachten wir die Basis

$$\mathcal{B}_1 := \{v_1, v_2, v_3\} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Diese haben wir so gewählt, weil v_1 und v_2 beide in E_1 liegen und linear unabhängig sind, und weil $v_3 = v_1 \times v_2$ orthogonal zu E_1 liegt. Die Abbildung $\mathcal{P}_1$ ist charakterisiert durch $\mathcal{P}_1|_{E_1} = \mathrm{Id}_{E_1}$ und $\mathcal{P}_1|_{E_1^\perp} = 0$ oder, aq̈uivalent dazu, $\mathcal{P}_1 v_i = v_i$ für $i = 1, 2$ und $\mathcal{P}_1 v_3 = 0$. Es muss also

$$[\mathcal{P}_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gelten. Die Transformationsmatrix von der Standardbasis $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{B}_1$ ist gegeben durch

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Damit ist

$$L^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

und folglich

$$[\mathcal{P}_1]_{\mathcal{E}} = L[\mathcal{P}_1]_{\mathcal{B}_1}L^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 13 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bitte wenden!

Analog gehen wir zur Berechnung von $[\mathcal{P}_2]_\mathcal{E}$ vor. Wir betrachten dazu

$$\mathcal{B}_2 := \{w_1, w_2, w_3\} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und bemerken, dass $\mathcal{P}_1$ bezüglich $\mathcal{B}_2$ dieselben Eigenschaften haben muss, die wir oben für $\mathcal{P}_1$ bezüglich $\mathcal{B}_1$ ausformuliert haben. Die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{B}_1$ ist

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mit Inverser

$$K^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten damit

$$[\mathcal{P}_2]_\mathcal{E} = K[\mathcal{P}_2]_{\mathcal{B}_2} K^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die Matrixdarstellung von $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2$ ist nun

$$[\mathcal{P}_1]_\mathcal{E}[\mathcal{P}_2]_\mathcal{E} = \frac{1}{28} \begin{bmatrix} 15 & -15 & 6 \\ -8 & 8 & 12 \\ -3 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

b) Der Beweis des Gram-Schmidt Verfahrens liefert v_1 und $v_2' := v_2 - \frac{<v_1,v_2>}{<v_1,v_1>} v_1$ als orthogonale Basis von E_1 und w_1 und $w_2' := w_2 - \frac{<w_1,w_2>}{<w_1,w_1>} w_1$ als orthogonale Basis von E_2. Explizit ist

$$v_2' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich der orthogonalen Basis $\{v_1, v_2', v_3\}$ beziehungsweise $\{w_1, w_2', w_3\}$ hat $\mathcal{P}_1$ beziehungsweise $\mathcal{P}_2$ Darstellungsmatrix in Diagonalgestalt.

3. Sei $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit Koordinatenvektor $[w]_{\{1,i\}} = (u\ v)^T$. Dann hat $\psi_z w = zw = (us - vt) + i(ut + sv)$ Koordinatenvektor

$$\begin{pmatrix} us - vt \\ ut + sv \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s & -t \\ t & s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$[\psi_z]_{\{1,i\}} = \begin{bmatrix} s & -t \\ t & s \end{bmatrix}.$$

Die Basis $\mathcal{B} = \{e^{i\vartheta}, e^{i(\vartheta+\pi/2)}\}$ entsteht aus $\{1, i\}$ durch Multiplikation mit $e^{i\vartheta}$ in $\mathbb{C}$. Also ist $L := [\psi_{e^{i\vartheta}}]_{\{1,i\}}$ die Transformationsmatrix des Basiswechsels von $\{1, i\}$ nach $\mathcal{B}$ und somit

$$[\psi_z]_\mathcal{B} = L^{-1}[\psi_z]_{\{1,i\}} L.$$

Nun korrespondieren alle Matrizen auf der rechten Seite zur Multiplikation mit einem Element aus $\mathbb{C}$. Weil Multiplikation in $\mathbb{C}$ kommutativ ist, kommutieren diese Matrizen miteinandern. Wir folgern $[\psi_z]_\mathcal{B} = [\psi_z]_{\{1,i\}}$.

Siehe nächste Seite!

4. **a)** $x_i y^i$; $x_i A^i_j y^j$; $x_k B^k_i A^i_j$

b) Die Einträge $i = j$ verschwinden in $A_{ij} x^i x^j$ da $A_{ii} = 0$. Für ein paar (i, j), $i \neq j$ kommt für jeden Term $(i - j) x^i x^j$ auch der Ausdruck $(j - i) x^j x^i$ die sich gegenseitig wegheben.

c)
1. Ja. Summation über i und j. Da m auf der linken Seite nicht vorkommt, ist B^m konstant.
2. Ja. Summation über n und m.
3. Nein, links wird über j summiert mit i und k freien Indizies. Auf der reichten Seite sind aber i und j freie Indizies.
4. Ja. Keine Summation, d.h. alle Indizies sind frei - aber der Tensor ist konstant.

d)
1. a_i
2. $\sum_i (x^i)^2$
3. $\sum_i 1 = n$ falls $i = 1 \ldots n$
4. $\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j$.