Lösungen 3

1. **a)** Der Koordinatenvektor von $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ bezüglich $\mathcal{E}$ ist $(a,b,c,d)^T$. Nach Anwendung von $\mathcal{T}$ haben wir also den Koordinatenvektor (a,c,b,d) womit $\mathcal{T}$ der Permutationsmatrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in der Standardbasis entspricht. Der Basiswechsel von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ ist gegeben durch die Matrix

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit ist

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}} = L^{-1}[\mathcal{T}]_{\mathcal{E}}L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

da

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) $[\mathcal{T}v]_{\mathcal{E}} = (1,3,2,4)^T$ und $[\mathcal{T}w]_{\mathcal{B}} = (0,1,1,0)^T$

2. Wir gehen im Prinzip nach dem Beispiel 3.8 im Skript. Per definition

$$\beta^i(v_j) = \delta^i_j.$$

Die Schlüsselbemerkung ist jetzt, diese Gleichung in Koordinaten (bezüglich der Standardbasis e_k) aufzuschreiben! Also falls $\beta^i = a^i_k \varepsilon^k$ und $v_j = L^m_j e_m$ bekommen wir mit einsetzen, dass

$$\delta^i_j = \beta^i(v_j) = a^i_k \varepsilon^k(L^m_j e_m) = a^i_k L^m_j \delta^k_m = a^i_k L^k_j$$

via Verwendung von $\varepsilon^k(e_m) = \delta^k_m$. Bisher nutzen wir L für die Matrix die den Basiswechseln angibt, in der Notation

$$(v_1 \dots v_3) = (e_1 \dots e_3)L,$$

und damit die Notation $v_j = L^m_j e_m$ berechtigt. Die Matrix definiert durch die Koordinaten (a^i_k) ist nach obiger Rechnung die Inverse von L, also $a^i_k = (L^{-1})^i_k$. Wegen $\beta^i = a^i_k \varepsilon^k$ ist der

Koordinatenvektor $[\beta^i]$ also gegeben durch die $i$te Zeile von L^{-1}. Diese können direkt abgelesen werden,

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **a)** Wir wollen die Koeffizienten b_i^j der Basisvektoren $b_i = \sum_j b_i^j x^j$ bestimmen zu der $\mathcal{B}^*$ dual ist. Per definition muss gelten $\beta^k(b_i) = \delta_i^k$, und durch konkretes einsetzen,

$$\beta^1(\sum_j b_i^j x^j) = b_i^0 \quad \beta^1(\sum_j b_i^j x^j) = b_i^1 \quad \beta^1(\sum_j b_i^j x^j) = b_i^2$$

bekommen wir, dass $b_1 = 1$, $b_2 = x$, $b_3 = x^2$, die Standardbasis von V.

b) Für ein generisches Polynom $p = \sum_{i \leq 2} a_i x^i$ ist

$$\omega(p) = \sum_{i \leq 0} a_i/(i+1) = a_0 + a_1/2 + a_2/3 = \beta^1(p) + \beta^2(p)/2 + \beta^3(p)/3.$$

Der Koordinatenvektor ist also $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

c) Wir gehen analog wie in Aufgabe 2 vor. Die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$ ist

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Inverse

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als Koordinatenvektoren von $\mathcal{A}^*$ bezüglich $\mathcal{B}^*$ hatten wir als Zeilenvektor dieser Matrix bestimmt. Also für den ersten Dualvektor α^1 haben wir $\alpha^1 = \beta^2 - \beta^1 - \beta^3$ und damit $\alpha^1(p = \sum a_i x^i) = a_1 - a_0 - a_2$. Analog, $\alpha^2(\sum a_i x^i) = a_0 + a_2$ und $\alpha^3(\sum a_i x^i) = a_2$.

d) Gefragt ist nach der Matrix M bezüglich der $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)M$ gilt. Wir haben die Indizes unten geschrieben, um zu unterstreichen wir jetzt im Vektorraum V^* arbeiten. Die Matrix M hatten wir schon für letzte Teilaufgabe genutzt. Um die Zeilenvektoren in Spaltenvektoren zu verwandeln, transponieren wir, also

$$M = L^{-T}.$$

Wir bemerken noch, dass keine Transposition nötig ist, wenn wir die Indizes oben behalten (siehe Skript Claim 3.11) und als Definition von M die Gleichung

$$(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)^T = M(\beta^1, \beta^2, \beta^3)^T$$

verwenden (siehe Tabelle 1 Summary nach Claim 3.11).

e) Das Transformationverhalten von Linearformen ist Kovariant, also $[\omega]_{\mathcal{A}^*} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})L = (\frac{1}{6}, \frac{3}{2}, \frac{-2}{3})$.

4. Die drei Vektoren sind linear unabhängig und es gilt $\det L = -3$, wobei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Transformationsmatrix von der Standardbasis nach $\mathcal{B}$ bezeichnet. Wegen Kontravarianz der Dualbasis müssen wir L^{-1} berechnen. Man rechnet

$$L^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. **a)** Man kann leicht zwei lineare unabhängige Vektoren finden (z.B. die aus Afgabe b)) womit $\dim V \geq 2$. Andererseits, ist $(1,0,0)$ sicher nicht in V, so dass $\dim V < \dim \mathbb{R}^3 = 3$ gilt. Wir schliessen, dass $\dim V = 2$.

b) Die Transformationsmatrix L ist definiert durch

$$(\tilde{b_1}, \tilde{b_2}) = (b_1, b_2)L,$$

oder equivalent,

$$\tilde{b_i} = b_i L_i^1 + b_2 L_i^2.$$

Nach Definition von $V = \{(x^1, x^2, x^3) : x^1 + x^2 + x^3 = 0\}$ ist für ein Vektor $v \in V$ die dritte Koordinate bereits durch die ersten beiden bestimmt, so dass wir das Gleichungssystem etwas vereinfachen und die dritte Koordinate vergessen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} L$$

also

$$L = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

c) Wir ergänzen $\mathcal{B}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ mit $b_3 = (1,0,0)$. Bemerke, dass es keine kanonische Wahl des dritten Vektors gibt, also die Dualbasis des Unterraums von dieser Wahl behängt. Dann wissen wir, dass die Koordinaten der Dualbasis von $\{b_1, b_2, b_3\}$ bezüglich der Dualbasis der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ durch die Zeilen der Inversematrix von (b_1, b_2, b_3) gegeben ist, also die Zeilen der Matrix

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\tilde{\mathcal{B}}$,

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$