Lösungen 4

1. **a)** Zunächst bemerken wir, dass das Kreuzprodukt eine bilineare Abbildung definiert,

$$(u + \lambda v) \times (w + \sigma x) = u \times w + \sigma u \times x + \lambda x \times w + \lambda \sigma v \times w.$$

Weiter ist das Spatprodukt φ die Komposition der Linearform $\varphi_u : w \mapsto u \bullet w$ mit dem Kreuzprodukt $(v, w) \mapsto v \times w$. Die Komposition linearer Abbildung ist wieder linear, also wird Linearität in den beiden Argumenten des Kreuzprodukts auf φ vererbt. Schliesslich ist auch die Abbildung $V \to V^*$, $u \mapsto \varphi_u$ linear, so dass man Linearität in jedem der drei Variablen folgert.

b) Der Beweis hängt von der Definition der Determinantenabbildung ab. Sei $V = \mathbb{R}^3$.

- Die Abbildung $\det : V^3 \to \mathbb{R}$ kann als eindeutig (bis auf skalares Vielfache) definierte Trilinearform definiert werden, die alternierend ist. Man prüft, dass wegen Symmetrie des Skalarproduktes $\bullet$ und Antisymmetrie vom Kreuzprodukt $\times$ das Spaltprodukt ebenfalls diese Eigenschaft hat. Da det und das Spatprodukt die Identitätsmatrix auf 1 Abbilden, definieren sie also die gleiche Trilinearform.
- Alternativ nutzt man die Leibnizformel: Für die Matrix definiert aus den Vektoren u, v, w gilt, dass

$$\begin{aligned}\det(u, v, w) &= u^1v^2w^3 - u^1v^3w^2 - u^2v^1w^3 + u^2v^3w^1 - u^3v^1w^2 + u^3v^2w^1 \\ &= u^1(v^2w^3 - v^3w^2) - u^2(v^1w^3 - v^3w^1) - u^3(v^1w^2 - v^2w^1) \\ &= u \bullet v \times w\end{aligned}$$

c) Nutzt man erstere Definition von Aufgabe b), ist dann det per Definition multilinear. Nutzt man die Leibnizformel (oder allgemein die Regeln zur Berechnung von det via Unterdeterminanten, i.e. "Laplacescher Entwicklungssatz"), entwickle man zuerst nach der Spalte, für die man Linearität zeigen will.

2. **a)** Wir haben

$$\det(G - \lambda \mathbb{1}) = (1 - \lambda)(5 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 1.$$

Durch Anwendung der Binomischen Formel finden wir $\lambda_\pm = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

b) Wir lösen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a^1_\pm + 2a^2_\pm &= \lambda_\pm a^1_\pm \\ 2a^1_\pm + 5a^2_\pm &= \lambda_\pm a^2_\pm . \end{aligned}$$

von Hand: Wir lösen die erste Zeile nach $a^2_\pm = \frac{1}{2} a^1_\pm (\lambda_\pm - 1)$ auf und sehen, dass mit der Wahl die zweite Zeile automatisch erfüllt ist. Damit ist ist für alle $a \neq 0$

$$v_\pm = \begin{pmatrix} a \\ a(1 \pm \sqrt{2}) \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von $\lambda_\pm$.

Bitte wenden!

c) Da

$$g(v_+, v_-) = v_+^T G v_- = \lambda_- v_+^T v_- = \lambda_-(a^2 + a^2 - 2a^2) = 0$$

stehen die Vektoren v_+ und v_- orthogonal aufeinander. Wir wählen nun $a = a_1$, so dass

$$g(v_\pm, v_\pm) = v_\pm^T G v_\pm = v_\pm^T \lambda_\pm v_\pm = 2a_1^2(10 \pm 7\sqrt{2}).$$

Damit $\{v_+, v_-\}$ eine orthonormale Basis bezüglich g bilden, wählen wir a_1 so dass $2a_1^2(10 \pm 7\sqrt{2}) = 1$. Dann besteht $\mathcal{A}$ aus den Vektoren

$$v_\pm = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1(1 \pm \sqrt{2}) \end{pmatrix}.$$

3. a) Zunächst beschreiben wir die Transformationsmatrix L von $\mathcal{E}$ (Standardbasis) nach $\mathcal{B}$. Diese ist gegeben durch

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit ist der Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ durch die Matrix

$$\Lambda = L^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

beschrieben. Sei G die Matrix von g bezüglich $\mathcal{E}$. Dann gilt

$$\delta_{ij} = g(b_i, b_j) = g(Le_i, Le_j) = (Le_i)^T G L e_j = e_i^T L^T G L e_j = (L^T G L)_{ij}$$

d.h., $\mathbb{1} = L^T G L$. Damit bekommen wir, dass

$$G = \left(L^{-1}\right)^T L^{-1} = \Lambda^T \Lambda = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -10 & -2 \\ -10 & 22 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Zunächst berechnen wir $g(v, v)$ bezüglich $\mathcal{E}$, also

$$g(v, v) = (2, 1, 3) G (2, 1, 3)^T = (-3, 7, 3/2)(2, 1, 3)^T = 11/2.$$

Andererseits ist $[v]_\mathcal{B} = \Lambda [v]_\mathcal{E} = \frac{1}{2}(2, 3, -3)^T$ und damit $g(v, v) = (1, 3/2, -3/2)\mathbb{1}(1, 3/2, -3/2)^T = 11/2$.

4. a) Wir schreiben die Koordinaten von einer Matrix A als A_{ij}, so dass

$$(AB)_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

wobei wir implizit über k summieren. Da $A_{ij}^T = A_{ji}$, haben wir

$$\mathrm{Spur}(A^T B) = A_{ki} B_{ki}$$

mit Summation über k und i. Aus dieser Formel lesen wir sofort Symmetrie zwischen A und B ab, da $A_{ki} B_{ki} = B_{ki} A_{ki}$ und auch Bilinearität: Ist C eine weiter Matrix und $\lambda \in \mathbb{R}$ dann

$$(\lambda A + C)_{ki} B_{ki} = \lambda A_{ki} B_{ki} + C_{ki} B_{ki}.$$

Siehe nächste Seite!

b) Die Matrix B einer Bilinearform β bzgl. der Basis

$$\mathcal{E} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist definiert als $B_{ij} = \beta(E_i, E_j)$. Für die Spur ist es am einfachsten, direkt $E_i^T E_j$ auszurechnen und die Summe der Diagonalelemente zu nehmen. Aus den 16 Kombinationen sehen wir, dass es auf der Diagonale von $E_i E_j$ nur Einträge geben kann, wenn beide $i = j = 1$ und $i = j = 4$, oder wenn $i = 2, j = 3$ und $j = 2, i = 3$, d.h. wenn $E_i^T = E_j$ gilt. Wir bekommen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Dualbasis $\{\varepsilon^i\}$ bezüglich $\mathcal{E}$ sind dann genau die Koordinatenformen, also für $m = m^i E_i$, $\varepsilon^i(m) = m^i$ gibt die Komponente. Wir sehen zugleich $\mathrm{Spur}_{\mathrm{Bil}}(m^T n) = \varepsilon^i(m)\varepsilon^i(n)$.

c) Da $[\mathrm{Spur}_{\mathrm{Bil}}]_{\mathcal{B}^*} = L^T [\mathrm{Spur}_{\mathrm{Bil}}]_{\mathcal{E}^*} L$, wobei L die Transformationsmatrix von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{B}$ ist, brauchen wir nur noch L zu berechnen;

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\left(L^{-1}\right)^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also $L^T B L = 4L^{-1}L = 4I$. Also $\mathrm{Spur}_{\mathrm{Bil}}(m^T n) = 4\varepsilon^i(m)\varepsilon^i(n)$.