Lösungen 5

1. **a)** Da die Basis $\mathcal{A}$ gerade orthonormal bezüglich g ist, gilt $g_{ij} = \delta_{ij}$. Die Basis $\mathcal{A}$ ist in Standardkoordinaten $\mathcal{E}$ gegeben durch

$$a_i = A_{ki} e_k$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nutzen wir die Matrixschreibweise und bezeichnen $(g_{ij}) = G = \mathbb{1}$ und $(\tilde{g}_{ij}) = \tilde{G}$, dann

$$\delta_{ij} = g(a_i, a_j) = g(A_{ki}e_k, A_{lj}e_l) = A_{ki}\tilde{g}_{kl}A_{lj} = A^T_{ik}\tilde{g}_{kl}A_{lj}$$

und equivalent

$$\mathbb{1} = A^T \tilde{G} A \iff \tilde{G} = A^{-T}A^{-1}.$$

Da

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ist somit

$$\tilde{G} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $\mathcal{A}$ ist orthonormal zu g so dass $\mathcal{A}^g = \mathcal{A}$. Sei $\{b^i\}$ die reziproke Basis von $\mathcal{E}$, und schreibe $b^i = B^i_j e_j$. Dann soll gelten, dass

$$\delta^i_j = g(b^i, e_j) = B^i_k g(e_k, e_j) = B^i_k \tilde{g}_{kj}$$

also muss (B^i_k) die Inversematrix von $\tilde{G}$ definieren, also

$$(B^i_k) = \tilde{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\mathcal{A}^g = \left\{ b^1 = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \ b^2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ b^3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Wir haben $[v]_{\mathcal{E}} = (3,1,0)^T$ oder $v = v^j e_j$. Da die Koordinaten kontravariant wechseln, und A die Matrix vom Basiswechsel $\mathcal{E}$ zu $\mathcal{A}$ darstellt, gilt

$$[v]^i_{\mathcal{A}} = (A^{-1})^i_j v^j = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

Da $\mathcal{A}$ orthonormal bezüglich g ist, sind die kovarianten Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{A}$ ebenfalls

$$[v]_{\mathcal{A}^g} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten $[v]_{\mathcal{E}^g}$ können wir auf zwei verschiedenen Weisen berechnen: Entweder wir betrachten $[v]_{\mathcal{E}}$ und nutzen die Beziehung, dass

$$[v]_{\mathcal{E}^g}^T = \tilde{G}[v]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 & -2 \\ -1 & 3/2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -3/2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

oder verwenden, dass die Koordinaten kovariant Wechseln: $[v]_{\mathcal{E}^g} A = [v]_{\mathcal{A}^g}$ also

$$[v]_{\mathcal{E}^g} = [v]_{\mathcal{A}^g} A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 & -5 \end{pmatrix}$$

2. **a)** g ist symmetrisch, weil Skalarmultiplikation kommutativ ist. g ist strikt positiv, weil der Integrand positiv ist. Bilinearität folgt aus Linearität des Integrals.

b) Einfaches Integrieren gibt sofort für die Basis $\mathcal{B}_{a,b,c}$, dass

$$g_{a,b,c} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{4} + \frac{2}{3}ab + \frac{b^2}{2} & \frac{ac}{3} + \frac{bc}{2} \\ \frac{ac}{3} + \frac{bc}{2} & \frac{c^2}{2} \end{pmatrix}$$

und somit für $\mathcal{F}$,

$$g_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Wir rechnen

$$(g_{\mathcal{F}})^{-1} = 18 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 18 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathcal{F}^g = \{b^1, b^2\}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 2x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18x - 12 & -24x + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 & b^2 \end{pmatrix}.$$

d) Nein; $\mathcal{F}$ zu normalisieren, so dass sie bezüglich g orthogonal ist, bedeutet Konstante a und c zu finden, so dass bezüglich $\{ax, c\}$, $g(ax, c) = 0$. Wir sehen aber zugleich, dass dies nur möglich ist, wenn $a = 0$ oder $c = 0$. Da die normalisierte $\mathcal{F}$ eine Basis bilden soll, ist dies nicht erlaubt.

e) $v = x + 1$ hat kontravariante Koordinaten $[v]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Formel zum Wechsel von kontra- nach kovariant ist gegeben durch $v_j = v^i g_{ij}$, also $[v]_{\mathcal{F}^g} = g_{\mathcal{F}}[v]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 7/6 \\ 5/6 \end{pmatrix}$.

f) Wir haben die Basis $\{b_1, b_2\} = \{2x + 1, 1\}$ mit Dualbasis $\{\beta^1, \beta^2\}$ gegeben, dann ist fuer $w \in V$, $\alpha(w) = \alpha(w^i b_i) = \int_0^1 dx(2w^1 x + (w^1 + w^2)) = 2w^1 + w^2 = 2\beta^1(w) + \beta^2(w)$. Also $\alpha = 2\beta^1 + \beta^2$.

Siehe nächste Seite!

3. a) Die Dualbasis $\mathcal{B}^* = \{\beta_1, \beta_x, \beta_{x^2}\}$ von $\{1, x, x^2\}$ gibt gerade die Koeffizienten eines Polynoms $p(X) = aX^2 + bX + c$, so dass $p(t_0) = at_0^2 + bt_0 + ct_0 = t_0^2\beta_{x^2}(p) + t_0\beta_x(p) + t_0\beta_1(p)$ und damit $[\varphi_{t_0}]_{\mathcal{B}^*} = (1, t_0, t_0^2)$

b) Sei $r(X) = aX^2 + bX + c$. Wir suchen a, b, c so dass

$$\begin{aligned} g(1,r) &= \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c &= 1 &= \varphi_{t_0}(1) \\ g(x,r) &= \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} &= t_0 &= \varphi_{t_0}(x) \\ g(x^2,r) &= \frac{a}{5} + \frac{b}{4} + \frac{c}{3} &= t_0^2 &= \varphi_{t_0}(x). \end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystem sind

$$\begin{aligned} a &= 180t_0^2 - 180t_0 + 30 \\ b &= -180t_0^2 + 192t_0 - 36 \\ c &= 30t_0^2 - 36t_0 + 9. \end{aligned}$$

Wir hätten r auch via dem kanonischen Isomorphismus zwischen V und V^* finden können: Dieser identifiziert die reziproke Basis $\mathcal{B}^g$ von $\mathcal{B}$ in V mit der dualen Basis $\mathcal{B}^*$ von V^* in dem $b \in \mathcal{B}^g$ auf $p \mapsto g(p,b)$ abgebildet wird. Ist $r = r_k b^k$, dann

$$\varphi_{t_0}(p) = g(p,r) = r_k g(p, b^k) = r_k\beta^k(p) \qquad (*)$$

Nehme jetzt $p = b_j$ wobei $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$, dann gilt

$$\varphi_{t_0}(b_j) = r_k\beta^k(b_j) \ = \ r_k\delta_j^k \ = \ r_j$$

also $[r]_{\mathcal{B}^g} = (1, t_0, t_0^2)^T$.

Alternativer Lösungsweg: wir beginnen mit dem Ansatz (*) – woraus $[r]_{\mathcal{B}^g} = (1, t_0, t_0^2)^T$ folgt – und bestimmen g^{ij}. Aus der Definition von g her, ist

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

und die Inversematrix ist also

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}.$$

Wir haben schon gesehen, dass $[r]_{\mathcal{B}^g} = (1, t_0, t_0^2)^T$. Wir können jetzt $[r]_{\mathcal{B}} = G^{-1}[r]_{\mathcal{B}^g}$ explizit berechnen, und bekommen das gleiche Ergebnis wie oben.