# Lösungen 6

**1.** **a)** Zunächst beschreibt man $V$: Die Gleichung $A = A^*$ führt zu

$$a_{11} = \overline{a}_{11}; a_{22} = \overline{a}_{22} \Leftrightarrow a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}$$

und

$$a_{12} = \overline{a}_{21}.$$

$V$ ist also 4-dimensional, und zum Beispiel parametrisiert durch $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a & b - ic \\ b + ic & d \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass die Elemente $\sigma_1$ und $\sigma_4$ den Unterraum $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ und $\sigma_2$ und $\sigma_3$ den Unterraum $\begin{pmatrix} 0 & b - ic \\ b + ic & 0 \end{pmatrix}$ aufspannen und damit insbesondere auch $V$ erzeugen. Aus Dimensionsgründen ist $\{\sigma_i\}$ eine Basis.

**b)** Zunächst zeigen wir, dass $g$ ein Skalarprodukt definiert. Seien $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ \overline{b}_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \overline{a}_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ in $V$, dann $\operatorname{Spur}(B^*A) = \operatorname{Spur}(BA) = \operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(A^*B)$ Symmetrie von g zeigt, wobei die mittlelere Gleichung die Zykluseigenschaft der Spur nutzt (oder alternativ folgender Rechnung abgelesen werden kann). Weiter ist

$$\operatorname{Spur}(AB) = a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{12}\overline{b_{12}} + \overline{a_{12}}b_{12}$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + a_{12}\overline{b_{12}} + \overline{a_{12}\overline{b_{12}}} = a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + 2\Re(a_{12}\overline{b_{12}})$$

in der Tat reellwertig. Ist $A = B$, dann $\operatorname{Spur}(AA) = a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2|a_{12}|^2 > 0$ ausser wenn $A = 0$. Wir haben gezeigt, dass $g$ ein Skalarprodukt definiert.

Per definition ist $g_{ij} = g(\sigma_i, \sigma_j)$. Wir rechnen zunächst die Paare $\sigma_i\sigma_j$ aus.

$$\sigma_1\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_1\sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_1\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2\sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \sigma_2\sigma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_3\sigma_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und bekommen damit

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**c)** Wir haben $g_{ij} = 2\delta_{ij}$. Die zu $\mathcal{S}$ reziproke Basis $\mathcal{S}^g = \{\sigma^j\}$ erfüllt per Definition $g(\sigma^j, \sigma_i) = \delta_i^j$, so dass wir lediglich $\sigma^j = c\sigma_j$ für ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$ wählen müssen, denn dann

$$g(\sigma^j, \sigma_i) = g(c\sigma_j, \sigma_i) = cg(\sigma_j, \sigma_i) = c2\delta_{ji}.$$

Für $c = \frac{1}{2}$ ist $\{\sigma^j = c\sigma_j\}$ also die zu $\mathcal{S}$ reziproke Basis.

**d)** Wir sehen sofort, dass $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4$ durch $\psi$ invariant gelassen wird, und $\psi(\sigma_3) = -\sigma_3$. Damit ist die Matrisdarstellung von $\psi$,

$$[\psi]_{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**e)** Wir können sofort ablesen, dass $\sigma_2$ und $\sigma_3$ Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind. Wir können daher die Fragestellung auf den Unterraum gespannt durch $\sigma_1$ und $\sigma_4$ reduzieren, und betrachten das Eigenwertproblem

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} v = \lambda v.$$

Wir lösen auf und bekommen für $v = (a, b)$

$$(3 - \lambda)a = b, \quad (3 - \lambda)b = a.$$

Dies gibt dir quadratische Gleichung $8 - 6\lambda + \lambda^2 = 0$ mit Lösungen $\lambda \in \{2, 4\}$. Damit gilt für $\lambda = 2$ die Gleichung $a = b$ und für $\lambda = 4$ gilt $a = -b$ und entsprechen damit den Vektoren $\sigma_1 + \sigma_4$ und $\sigma_1 - \sigma_4$. Zusammenfassend,

$$\mathcal{T} = \{\tau_i\} = \{\sigma_1 + \sigma_4, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1 - \sigma_4\}$$

und Spektrum $\{1, 2, 4\}$.

Der Basiswechsel von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{T}$ ist gegeben durch

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und daher bekommen wir für $\widetilde{g}_{ij}$, die Koordinaten von $g$ bezüglich $\mathcal{T}$, dass

$$\widetilde{g}_{ij} = (L^T (g_{lk}) L)_{ij} = 2(L^T L)_{ij} = \begin{cases} 4\delta_{ij} & \text{falls } i \text{ oder } j \in \{1, 4\} \\ 2\delta_{ij} & \text{sonst.} \end{cases}$$

**f)** Da $\mathcal{S}^g = \frac{1}{2}\mathcal{S}$, $[\eta]_{\mathcal{S}^g} = 2(\sigma^2 + \sigma^4) = (0, 2, 0, 2)$. Aus *e)* ist $(\widetilde{g}_{ij})$ bekannt, und $[\eta]_{\mathcal{T}^g} = (\widetilde{g}_{ij})[\eta]_{\mathcal{T}}$ ist wegen $[\eta]_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_4) + \tau_2 = (\frac{1}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2})^T$ also $[\eta]_{\mathcal{T}^g} = (2, 2, 0, 2)$.

**2. a)**

$$\widetilde{T}^{ij}_{klm} = \Lambda^i_n \Lambda^j_p L^q_k L^r_l L^s_m T^{np}_{qrs}$$

und $\widetilde{T}^i = \Lambda^i_k T^k$, $\widetilde{T}^i_j = \Lambda^i_k L^l_j T^k_l$, $\widetilde{T}^{ij}_k = \Lambda^i_n \Lambda^j_p L^q_k T^{np}_q$, $\widetilde{T}^i_{klm} = \Lambda^i_n L^q_k L^r_l L^s_m T^n_{qrs}$.

**b)** $Q$: nein, denn $\Lambda^i_m \Lambda^j_n Q^{jn}$; $R$: ja, (3,0); $S$: ja, (2,1); $T$: nein.

**Siehe nächste Seite!**

**c)** $F$ is ein (1,1)-Tensor; Nein, Ja, Nein.

**3. a)** Ein allgemeiner Tensor $T_{ijkl}$ mit $i,j,k,l = 1,2$ besitzt $2^4 = 16$ Einträge. Da $T_{ijkl} = T_{\pi(ijkl)}$ für eine beliebige Permutation gilt, folgt, dass die Angabe eines Eintrages $T_{ijkl}$ alle anderen Einträge mit der gleichen Anzahl an '1' bestimmt. Es bleiben 5 unabhängige Koordinaten übrig: $T_{1111}, T_{1112}, T_{1122}, T_{2222}$.

Es handelt sich bei $T_{ijkl}$ um einen Tensor vom Typ $(0,4)$. Unter Basiswechsel verhält sich $T$ wie folgt: $\widetilde{T}_{ijkl} = L_i^a L_k^b L_k^c L_l^d T_{abcd}$.

**b)** $M = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ und da die Materialeigenschaft unter dem durch $M$ beschriebenen Basiswechsel invariant bleibt, folgt $T_{ijkl} = M_i^a M_j^b M_k^c M_l^d T_{abcd}$. Es gilt also

$$\begin{aligned} T_{1222} &= M_1^1 M_2^2 M_2^2 M_2^2 T_{1222} = -T_{1222} \\ T_{1112} &= M_1^1 M_1^1 M_1^1 M_2^2 T_{1222} = -T_{1112}. \end{aligned}$$

**c)** Wir haben $T(e_i, e_j, e_k, e_l) = T_{ijkl}$. Da $T$ multilinear ist, wegen Symmetrie und wegen dem obigen Resultat folgt entsprechend

$$T(e_1, e_2, e_1+e_2, 7e_1-e_2) = 7T_{1211}+7T_{1221}-T_{1212}-T_{1222} = 0+7T_{1122}-T_{1122}-0 = 6T_{1122} = 6{\cdot}5 = 30$$

**d)**

$$U^{ij} = U(\beta^i, \beta^j) = T(e_1, e_2, \beta^i(e_1)e_1, \beta^j(e_2)e_2) = \beta^i(e_1)\beta^j(e_2)T_{1212} = 5\delta_1^i\delta_2^j.$$

**4. a)** Wir schreiben das charakteristische Polynom aus,

$$\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda - 39\lambda + 28.$$

Wir raten die Nullstelle $\lambda_1 = 1$ und reduzieren dann via Polynomdivision durch $(\lambda - 1)$ auf das quadratische Polynom $\lambda^2 - 11\lambda + 28$ mit Nullstellen $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 7$. Die Hauptspannungen sind also $\{1, 4, 7\}$. Für die Hauptspannungsrichtungen lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} v_\lambda = \lambda v_\lambda$$

für $\lambda \in \{1, 4, 7\}$. Wir rechnen $v_1$ aus:

- $5(v_1)_1 - 2(v_1)_2 = (v_1)_1$
- $-2(v_1)_1 + 4(v_1)_2 - 2(v_1)_3 = (v_1)_2$
- $-2(v_1)_2 + 3(v_1)_3 = (v_1)_3$.

Die erste und dritte Gleichung ist equivalent zu $2(v_1)_1 = (v_1)_2 = (v_1)_1$, so dass wir $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ wählen können. Analog findet man $v_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $v_7 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Diese Vektoren stehen orthogonal aufeinander und man kann sie noch normalisieren um eine orthonormal Basis zu bilden.

**b)** Die Spur Basisunabhängig, und damit gleich die Summe der Eigentwerte $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 12$.

Wir definieren also $\sigma_S = \sigma - 4\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ und $\sigma_P = 4\mathbb{1} = \operatorname{diag}(4,4,4)$.