Lösungen Ferienserie

1. **a)** Wir bemerken zuerst, dass $e_i \times e_i = (0,0,0)^T$. Dann ist $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_1 \times e_3 = -e_2$, $e_2 \times e_3 = -e_1$ und wir benutzen danach, dass $u \times v = -v \times u$. Das heisst, $\varepsilon_{ij}^k = 0$ falls ein Index zweimal vorkommt, und sonst $\varepsilon_{ij}^k = \pm 1$, abhängend davon (i,j,k) sei eine gerade oder ungerade Permutation :

$$\varepsilon_{ij}^k = \begin{cases} +1 & (i,j,k) \text{ ist eine gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & (i,j,k) \text{ ist eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Durch explizites ausrechnen zeigt man: $(\mu u + u') \times v = \mu(u \times v) + u' \times v$ und $v \times (\mu u + u') = \mu(v \times u) + v \times u'$.

c) Wir nutzen, dass $\varepsilon_{23}^1 = 1$ und $\varepsilon_{32}^1 = -1$ und damit

$$(u \times v)^1 = u^2 v^3 - u^3 v^2 = \varepsilon_{23}^1 u^2 v^3 + \varepsilon_{32}^1 u^3 v^2 = \varepsilon_{ij}^1 u^i v^j$$

gilt, wobei die letzte Gleichheit stimmt, weil ε_{ij}^1 verschwindet für i oder j gleich 1 und wenn $i = j$. Analog für $(u \times v)^2$ und $(u \times v)^3$.

d)
1. Wir bemerken, dass die gerade Permutationsabbildung $(i,j,k) \mapsto (j,k,i)$ das Permutationszeichen erhält, d.h. wenn (i,j,k) von der Form $(1,2,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ ist, dann ist auch (j,k,i) von der Form. Analog für wenn (i,j,k) ungerade ist. Ist ein Index doppelt in (i,j,k), dann klarer Weise auch in (j,k,i), so dass
$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki}.$$
2. Für die Identität $\varepsilon_{ij}^k = -\varepsilon_{ji}^k$ bemerken wir, dass dies eine einfache Permutation $(i,j) \mapsto (j,i)$ ist, und damit das Zeichen der Permutation (i,j,k) umdreht (Prüfe: Vertauschen (genau) zweier Stellen von ((1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)) gibt ein Element aus ((1,3,2),(2,1,3),(3,2,1)) und vice versa.)
3. Die Antisymmetrie des Kreuzproduktes folgt nun aus Identität (2.) und Linearität von $\times$.

e)
$$\det A = A_1^1(A_2^2 A_3^3 - A_3^2 A_2^3) - A_2^1(A_1^2 A_3^3 - A_3^2 A_1^3) + A_3^1(A_1^2 A_2^3 - A_2^2 A_1^3)$$
$$= \varepsilon^{123} A_1^1 A_2^2 A_3^3 + \varepsilon^{132} A_1^1 A_3^2 A_2^3 + \varepsilon^{213} A_2^1 A_1^2 A_3^3 + \varepsilon^{231} A_2^1 A_3^2 A_1^3 + \varepsilon^{312} A_3^1 A_1^2 A_2^3 + \varepsilon^{321} A_3^1 A_2^2 A_1^3 = \varepsilon^{ijk} A_i^1 A_j^2 A_k^3.$$

(Oder direkt Leibniz' Formel verwenden.)

f) Wir wollen zeigen, dass

$$u \times v \bullet x \times y = \det \begin{pmatrix} u \bullet x & u \bullet y \\ v \bullet x & v \bullet y \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben zunächst die linke Seite aus:

$$u \times v \bullet x \times y = u^k v^l x^i y^j (e_k \times e_l)^n \delta_{nm} (e_i \times e_j)^m = u^k v^l x^i y^j \varepsilon_{kl}^n \varepsilon_{ij}^m \delta_{nm} = u^k v^l x^i y^j \varepsilon_{kl}^n \varepsilon_{ijn}.$$

Für die rechte Seite bekommen wir,

$$u^k x^n \delta_{kn} v^l y^m \delta_{lm} - v^i x^n \delta_{in} u^j y^m \delta_{jm} = u^k (x^n \delta_{kn} v^l y^m \delta_{lm} - v^i x^n \delta_{in} y^m \delta_{km})$$

$$= u^k v^l (\delta_{kn} x^n y^m \delta_{lm} - x^n \delta_{ln} y^m \delta_{km}) = u^k v^l (x_k y_l - x_l y_k) = u^k v^l (x \times y)^n \varepsilon_{kln} = u^k v^l x^i y^j \varepsilon^n_{ij} \varepsilon_{kln}$$

und damit Gleichheit beider Seiten.

2. **a)** Seien $\{b_1, \ldots, b_n\}$ die Elemente der Basis $\mathcal{B}$. Sei Matrix $G = (g_{ij})$ definiert durch $g_{ij} = g(b_i, b_j)$ und $A^j_i = f(b_i)^j$. Weiter ist wegen Bilinearität $g(f(u), f(v)) = g(u, v)$ für alle $u, v \in V$ äquivalent mit $g(f(b_i), f(b_j)) = g(b_i, b_j)$ für alle i, j. Damit ist

$$g_{ij} = g_{kl} A^k_i A^l_j = (A^T)^i_k g_{kl} A^l_i \iff G = A^T G A.$$

Ist $\mathcal{B}$ orthonormal, also $G = \mathbb{1}$ die Identitätsmatrix, dann ist f orthogonal genau wenn $A^T A = \mathbb{1}$.

b) Wir können die möglichen Werte von α auf folgender Art finden: M ist orthogonal, falls $M^\top M = I_2$. Da $I_2^\top = I_2$ und $(u\,u^\top)^\top = u\,u^\top$, folgt

$$\begin{aligned} M^\top =& (I_2 - \alpha u\,u^\top)^\top = I_2 - \alpha u\,u^\top = M \text{ und damit} \\ M^\top M =& M\,M = (I_2 - \alpha u\,u^\top)(I_2 - \alpha u\,u^\top) \\ =& I_2\,I_2 - 2I_2\,\alpha u\,u^\top + \alpha u\,u^\top\,\alpha u\,u^\top \\ =& I_2 - 2\alpha u\,u^\top + \alpha^2 u \underbrace{u^\top u}_{=1} u^\top \\ =& I_2 + (-2\alpha + \alpha^2) u\,u^\top \end{aligned}$$

Da $u\,u^\top \neq I_2$, gilt $M^\top M = I_2$ genau dann, wenn $-2\alpha + \alpha^2 = 0$, also für $\alpha = 2$ oder $\alpha = 0$ (dann würde $M = I_2$ trivialerweise orthogonal).

c) Die Matrix von F_u bezüglich der orthonormalen Basis $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ ist die Diagonalmatrix $\operatorname{diag}(1-2u, 1, 1, -1)$. Eine Diagonalmatrix ist genau dann orthogonal, wenn die Einträge Norm gleich 1 haben, also ist $u \in \{0, 1\}$.

3. **a)** g definiert für alle a_1, a_2 eine Bilinearform. Für $a_1 = 5$ ist A symmetrisch und damit g symmetrisch (Wieso?). Damit g ein Skalarprodukt definiert, muss A positiv-definit sein. Die Determinante von A ist linear in a_2, insbesondere existiert ein $c \in \mathbb{R}$ (≈ 2.8) an dem A für $a_2 = c$ singulär ist (d.h. der Eigenwert=0). Für $a_2 > c$ sind alle Eigenwerte positiv und damit ist A positiv-definit. (Ermittlung von a_2 wird natürlich keine Prüfungsfrage sein!)

b) $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Die Matrixdarstellung von g bezüglich $\mathcal{B}$ ist $G = A$. Der Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}^g$ ist also durch die Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -3 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ gegeben. Die Koordinaten von den Basisvektoren $\mathcal{B}^g$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ kann man als die Zeilen von A^{-1} ablesen. Der Basiswechsel von zwei reziproken Basen ist kontravariant und damit von $\mathcal{B}^g$ nach $\mathcal{C}^g$ durch L^{-1} gegeben.

Siehe nächste Seite!

d) Für kovarianten Koordinaten eines Vektors ist nach der Darstellung in der reziproken Basis gefragt: $[v]_{\mathcal{B}^G} = G[v]_{\mathcal{B}}$ Analog für $[v]_{\mathcal{C}^g}$ oder die Formel vom Basiswechsel $\mathcal{B}^g$ nach $\mathcal{C}^G$ nutzen – die kovariant ist, also Multiplikation von $[v]_{\mathcal{B}^g}$ mit L!

4. a) $[q]_{\mathcal{B}} = (1, -1, 0, 0)^T$ und $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $[q]_{\mathcal{B}'} = (2, -1, 0, 0)^T$ und $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c) Sei $L = L_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$. Dann $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Wir können verifizieren, daß

$$[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'} = L^{-1}[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} L \quad (*).$$

Sei $F' = [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'}$, $F = [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$, und $\Lambda = L^{-1}$. In Einstein-Konvention, $(*)$ ist $F'^i_j = \Lambda^i_k F^k_l L^l_j$.

d) $\mathcal{E} = \{1, x, x^x, x^3\}$ ist eine Eigenbasis für $\mathcal{F}$. Dann $[\mathcal{F}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5. a)

B	$(0, 2)$
f	$(1, 1)$
A	$(0, 2)$
g	$(0, 1)$
T	$(1, 3)$

Das Transformationsverhalten liest sich dann $\widetilde{B}_{ij} = L^k_i L^l_j B_{kl}$, $\widetilde{A}_{ij} = L^k_i L^l_j A_{kl}$, $\widetilde{g}_i = L^k_i g_k$, $\widetilde{f}^i_j = \Lambda^i_k L^l_j f^k_l$, $\widetilde{T}^m_{ijn} = L^k_i L^l_j L^r_n \Lambda^m_s T^s_{klr}$.

b) Für die Indizes $l = k$ haben wir jeweils $2 + 1 = 3$ Möglichkeiten für (i, j). Für eine fixe Wahl $k \neq l$ sind alle Tupel (i, j) erlaubt (also 4), wobei dann (für $n = 2$) die andere Wahl von $k \neq l$ eindeutig bestimmt ist. Also ist die Dimension von $\mathcal{W}$ gleich 10.

6. a) Die Hauptkoeffizienten sind $-1, 1, 2$.

b)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Es gilt

$$\left(\varepsilon_{ij}^{K}\right) = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\left(\varepsilon_{ij}\right)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(\varepsilon_{ij}^{S}\right) = \left(\varepsilon_{ij}\right) - \left(\varepsilon_{ij}^{K}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

d) Es gilt

$$\left(E^{ij11}\right) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} \qquad \left(E^{ijkl}\right) = \left(E^{ij11}\right) + (k+l-2)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Entsprechend gilt

$$\left(\sigma^{ij}\right) = \left(E^{ijkl}\sigma_{kl}\right) = \begin{pmatrix}10 & 14 & 18\\ 14 & 18 & 22\\ 18 & 22 & 26\end{pmatrix}$$