ETH Zürich, D-MATL
Multilineare Algebra
Winter 2011
Prof. Ö. Imamoglu

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten eigene Notizen. Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nicht motivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

—- • —-

1. [10 Punkte] Sei V ein 3-dimensionaler Vektorraum und $\mathcal{F} : V \to V$ eine invertierbare diagonalisierbare lineare Abbildung. Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Basen von V. Sei A (resp. A') die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$). Sei Λ die Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$. Welche der folgenden Aussagen treffen zu (bitte genau lesen). Begründe deine Antwort.

Aussage	Wahr	Falsch
Die Matrizen A und A' besitzen dasselbe charakteristische Polynom.		
Die Matrizen A und A' besitzen dieselben Eigenwerte und auch dieselben Eigenvektoren.		
Die Determinante von A (ie. bezüglich Basis $\mathcal{B}$) entspricht dem Inversen der Determinante von $\mathcal{F}$ bezüglich der Dualbasis von $\mathcal{B}$.		
Die Eigenwerte von A^{-1} entsprechen den Inversen der Eigenwerte von A.		
Sei A^{ij} der (i,j)-te Eintrag von A. Es gilt: $(A')^{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} \Lambda^i_k \Lambda^j_l A^{kl}$		

Richtige Antwort: 1P, Begründung: 1P, Falsche Antwort: -1P (bis Minimum 0P).

2. [13 Punkte] Sei $\mathcal{F} : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ wie folgt gegeben:

$$\mathcal{F}(p(x)) := p(x) - x\left(\frac{\partial}{\partial x}p(x)\right)$$

Sei $q(x) := 1 - x$.

a) Sei folgende Basis $\mathcal{B}$ gegeben: $b_1 = 1$, $b_2 = x$, $b_3 = 1 - x^2$, $b_4 = 1 - x^3$. Bestimme den Koordinatenvektor von $q(x)$ und die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{B}$ (bezeichnet mit $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$).

b) Sei folgende Basis $\mathcal{B}'$ gegeben: $b_1' = 1$, $b_2' = 1 + x$, $b_3' = 1 + x + x^2$, $b_4' = 1 + x + x^2 + x^3$. Bestimme den Koordinatenvektor von $q(x)$ und die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{B}'$ (bezeichnet mit $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'}$).

c) Berechne die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ (bezeichnet mit Λ). Was ist der Zusammenhang zwischen $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$ und $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'}$? Schreibe dies auch in Einstein-Summenkonvention.

d) Bestimme eine Eigenbasis für $\mathcal{F}$ (das sind Polynome in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$) und berechne die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F}$ bezüglich dieser Eigenbasis.

3. [12 Punkte] Sei $\{e_j\}$ die Standardbasis. Sei $\vec{x} = x^i e_i, \vec{y} = y^j e_j \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit den Matrixeinträgen A^i_j.

a) Schreibe die Koordinaten folgender Ausdrücke in der Einstein-Summenkonvention (ohne Summenzeichen) auf:

$$\vec{x}^\top \vec{x} \qquad\qquad A^3 + A^\top \qquad\qquad \vec{x}\left(\vec{y}^\top \vec{x}\right) \qquad\qquad \vec{x} \times (A\vec{y}) \ \textit{(n=3)}$$

b) Wie verhält sich ein Tensor T vom Typ $(1,0)$, $(2,2)$ und $(4,1)$ jeweils unter Basiswechsel (ausgedrückt in der Einstein-Summenkonvention)?

c) Welche der folgenden indizierten Grössen Q, R, S, T besitzen das Transformationsverhalten eines Tensors? Bestimme gegebenenfalls den Typ des Tensors.

$$(Q')^{ij} = \Lambda^i_m \Lambda^j_n Q^{jn} \qquad (R')^{ijk} = \Lambda^i_q \Lambda^j_r \Lambda^k_s R^{qrs} \qquad L^q_i \Lambda^k_s \left(S'\right)^{ij}_k = \Lambda^j_r S^{qr}_s \qquad (T')^i_j = \Lambda^i_j L^r_k T^r_k$$

4. [15 Punkte] Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt $g(u,v) = u^\top v$. Sei

$$\mathcal{B} := \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und}$$

$$\mathcal{B}' := \left\{ b_1{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Bestimme die Koordinaten g_{ij} und g'_{ij} von g bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$. Bestimme auch die Transformationsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ (bezeichnet mit Λ). Was ist der Zusammenhang zwischen g_{ij} und g'_{ij} (in der Einstein-Summenkonvention). Um was für einen Typ Tensor handelt es sich bei g?

b) Bestimme die duale Basis von $\mathcal{B}'$ bezüglich g.

c) Sei $\vec{x} = x^i b_i$ ein Vektor mit den kontravarianten Koordinaten $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich $\mathcal{B}$. Berechne die kovarianten Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich $\mathcal{B}$. Bestimme auch die ko- und kontravarianten Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich $\mathcal{B}'$.