D-MATH
Dr. Vasile Gradinaru
Alexander Dabrowski



# Serie 11

**Best Before:** End of semester

**Koordinatoren:** Alexander Dabrowski, HG G 52.1, `alexander.dabrowski@sam.math.ethz.ch`

**Webpage:** http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/nm_pc

**1.** *Pendel mit Reibung und externer Kraft*

Wir betrachten das mathematische Pendel, welches durch folgende Gleichung ($l = g = 1$) beschrieben ist:

$$\ddot{\varphi} + \mu\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = F(t) \tag{1}$$

mit externer Kraft:

$$F(t) = A\sin(\omega t) \tag{2}$$

mit Frequenz $\omega = 1.3$, Amplitude $A = 1$ und Reibung $\mu = 0$ bzw. $\mu = 0.1$ . Verwenden Sie die Anfangswerte $\varphi(0) = \frac{\pi}{3}$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$.

**a)** Lösen Sie (1) mit Runge-Kutta aus `ode45`.

**b)** Lösen Sie (1) mit den Splitting-Verfahren `SS`, `PRKS6`, `Y61`, `KL8`.

**c)** Plotten Sie die Auslenkung $\varphi(t)$ und die Trajektorien im Phasenraum $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$.

**2.** *Design einer Rutsche (15 Punkte)*

Sei der Lorentzian $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Ein Architekt möchte eine Rutsche entwickeln, die so nah wie möglich am Graph der Funktion:

$$g(x) = \frac{1}{2}f(5x) + f(5x+5) \quad \text{mit} \quad x \in [-1,1]$$

liegt. Dafür benutzt er ein Computerprogramm, das polynomiale Interpolation zur Darstellung von Funktionen verwendet.

**a)** Er nimmt $N+1$ äquidistante Punkte in $[-1,1]$, und verwendet sein Interpolationsprogramm mit einem Polynom vom Grad $N$. Probieren Sie diese Methode mit $N = 21$. Plotten Sie $g(x)$ und das Interpolationspolynom $p_N(x)$ an $10^3$ Punkten `a = linspace(-1,1,1000)`. Kann das so entstandene Kunstobjekt zum Rutschen verwendet werden? Liefern grössere $N$ bessere Ergebnisse?

**b)** Welches ist die optimale Wahl der Interpolationspunkte für ein allgemeines $N$? Werten Sie diese Interpolation für 21 Interpolationsknoten sowie $g$ in `a` aus. Plotten Sie beide gegen `a`. Berechnen und notieren Sie den maximalen absoluten Fehler.

**c)** Bestimmen Sie numerisch die minimale Anzahl Interpolationspunkte, so dass der maximale Fehler in `a` kleiner als $10^{-3}$ ist.

**d)** Verwenden Sie eine geeignete Substitution und die Trapezregel, um

$$I(g) = \int_{-1}^{1} g(x)^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$$

numerisch zu approximieren. Plotten Sie den absoluten Fehler für $M \in [11, 21, \ldots, 151]$ Funktionsauswertungen. Warum kann man die Trapezregel nicht direkt (ohne Variablenwechsel) auf $I(g)$ anwenden? Plotten Sie auch den Fehler, der sich durch die direkte Anwendung der Mittelpunktsregel ergibt. Der exakte Wert dieses Integrals ist $I = 0.6721696847788537$.

**e)** Sei $p_N$ das Interpolationspolynom. Berechnen Sie $I(p_N)$ so effizient wie Ihnen möglich ohne die Trapezregel zu verwenden und plotten Sie den absoluten Fehler $|I - I(p_N)|$ für $N \in [10, 20, \ldots, 100]$.

**3.** *Faltung*

Seien $f$ und $g$ zwei 1-periodische glatte Funktionen mit $\hat{f}(0) = 0$. Wir notieren:

$$I(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$D(x) = g'(x)\,.$$

Sei die Faltung von $f$ und $g$ definiert als:

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(t)g(x-t)\mathrm{d}t\,. \tag{3}$$

Zeige, dass $I * D = f * g$ gilt. Begründe warum die Bedingung an $f$ notwendig ist.

**4.** *Diskrete Fouriertransformation und Faltung*

Wir wollen zu zwei Vektoren $\underline{x}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ die *periodische diskrete Faltung* berechnen, das heisst wir suchen einen Vektor $\underline{z} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$z_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_{k-j} y_j, \quad k = 0, \dots, n-1\,. \tag{4}$$

Alle Indizes sind modulo $n$ zu verstehen.

**a)** Sei $\hat{v}_l$ die $l$-te Komponente der diskreten Fouriertransformierten des Vektors $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, das heisst

$$\hat{v}_l = \sum_{k=0}^{n-1} v_k e^{-\frac{2\pi ikl}{n}}, \quad l = 0, \dots, n-1\,. \tag{5}$$

Zeige, dass zwischen $\underline{x}$, $\underline{y}$ und $\underline{z}$ die folgende Beziehung gilt:

$$\hat{z}_l = \hat{x}_l \cdot \hat{y}_l, \quad l = 0, \dots, n-1\,. \tag{6}$$

**b)** Implementiere eine `Python`-Funktion `def fft_conv(x,y)`, welche mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation die periodische diskrete Faltung von $\underline{x}$ und $\underline{y}$ berechnet. Verwende `fft` und `ifft` aus `numpy.fft`.

**c)** Implementiere eine `Python`-Funktion `poly_multfft(a,b)`, die die Koeffizienten $c_n$ des Produktes $p(x)q(x) = \sum_{n=0}^{2n-2} c_n x^n$ zweier Polynome $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ und $q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$ mithilfe der periodischen diskreten Faltung (`fft_conv(x,y)`) bestimmt.
Validiere deine Implementierung anhand der naiven Implementierung in `poly_mult(a,b)` in `discreteConv_Template.py`.

*Hinweis*: $c_i$ ist die sogenannte *nicht-periodische Faltung* von $(a_0, \dots, a_{n-1})$ und $(b_0, \dots, b_{n-1})$.

**d)** Welche der beiden Implementierungen ist für grosse $n$ effizienter? Begründe deine Antwort.

**5.** *NMR Analyse* [1]

Sei der wahre Output einer NMR-Analyse gegeben durch

$$f(x) := \exp\left(-\frac{x}{300}\right)\left(\sin\left(\frac{2\pi x}{4.8}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{4.5}\right)\right) \tag{7}$$

für $x = 0, \dots, N-1$ mit $N = 2^{12}$ Punkten.

**a)** Plotte das Energiespektrum des wahren Signals.

**b)** Addiere zu den Ergebnissen ein Rauschen, das aus Zufallszahlen uniform aus $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ besteht, um ein gemessenes Signal zu simulieren. Plotte das wahre und das gemessene Signal.

**c)** Plotte das Energiespektrum des gemessenen Signals. Was sind die relevanten Frequenzen?

**d)** Multipliziere die gemessenen Werte mit $\exp\left(-\frac{x}{200}\right)$ und plotte wiederum das Energiespektrum. Kannst du jetzt die relevanten Frequenzen erkennen?

[1] Nach G. Beddard, *Applying Maths in the Chemical and Biomolecular Sciences*, Oxford Press 2009

**6.** *Orientierung von Fledermäusen* [2]

Eine Fledermaus (*Eptesicus fuscus*) verwendet für die Orientierung und Jagd im Flug zwei Arten von Signalen, gegeben durch folgende parametrisierte Funktion:

$$s(t) := \cos\left(150t - \frac{a}{(1+t)^2}\right)\left(e^{-12t} - e^{-13t} + 0.02e^{-10(t-\frac{1}{2})^2}\right). \tag{8}$$

Im normalen Flug ist $a = 0$ und bei der Jagd $a = 60$.

**a)** Plotte die zwei Signale für $t \in [0, 1]$ Millisekunden. Was ist der Unterschied?

**b)** Plotte die Energiespektren. Was ist der Unterschied?

**c)** Berechne und plotte eine Autokorrelation. Warum ist $a = 60$ viel effektiver bei der Jagd?

**d)** Berechne und plotte die kummulative Autokorrelation:

$$c_k := \sum_{j=0}^{k-1} \frac{|v_j|}{|v_{N-1}|} \tag{9}$$

gegen die Entfernung in Centimeter (`d = linspace(0, 10, N)`). In dieser Formel ist $v$ jeweils die Autokorrelation aus der vorigen Aufgabe. Vergleiche mit den experimentell gewonnenen Daten (aus J. Simmons, *Science 171:925*, Fig. 2 oder J. Simmons, 1973):

| Entfernung | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| % Erfolg | 52 | 61 | 70.5 | 78 | 88 | 96 | 95 | 97 | 94 | 96 | 97.5 | 96 | 96 |

[2] Nach G. Beddard, *Applying Maths in the Chemical and Biomolecular Sciences*, Oxford Press 2009