Musterlösung 3

1. **a)** Es gilt $f_Y \geq 0$. Da f_Y eine Dichte sein soll, muss zudem gelten, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, dy = 1.$$

Wir berechnen daher die linke Seite:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{c}{(1+y)^5}\, dy = -\frac{c}{4(1+y)^4}\bigg|_{y=0}^{y=+\infty} = \frac{c}{4}.$$

Die erste Gleichung impliziert, dass $c = 4$.

b) Es gilt $F_Y(y) = 0$, für $y \leq 0$, da $f_Y(y) = 0$ für $y \leq 0$. Für $y > 0$ erhalten wir

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\, dt = \int_0^{y} \frac{4}{(1+t)^5}\, dt = -\frac{1}{(1+t)^4}\bigg|_{t=0}^{t=y} = 1 - \frac{1}{(1+y)^4}.$$

Daraus folgt

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{(1+y)^4} & \text{falls } y > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerke, dass diese Funktion stetig in 0 ist.

c) Wir schreiben die Verteilungsfunktion von Z mit Hilfe der Verteilungsfunktion von Y: für $z \leq 0$ gilt $F_Z(z) = 0$ und für $z > 0$ haben wir

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(Y^{-2} \leq z) = P(Y \geq z^{-\frac{1}{2}}) = 1 - P(Y < z^{-\frac{1}{2}}) \\ &= 1 - F_Y((z^{-\frac{1}{2}})-) = 1 - F_Y(z^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\left(1 + z^{-\frac{1}{2}}\right)^4}, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $F_Y((z^{-\frac{1}{2}})-) = F_Y(z^{-\frac{1}{2}})$, was aus der Stetigkeit von F_Y folgt. Wir erhalten, dass

$$F_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+z^{-\frac{1}{2}})^4} & \text{falls } z > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$f_Z(z) := \begin{cases} \dfrac{2}{z^{\frac{3}{2}}(1+z^{-\frac{1}{2}})^5} & \text{falls } z > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bitte wenden!

2. **a)** Es soll gelten, dass

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} F(t) = 1.$$

Aus der ersten Bedingung bekommen wir

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{1+\lambda t^2}{1-15t} = \lambda \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2}{1-15t},$$

und das ist gleich 0 nur, falls $\lambda = 0$. Andererseits ist es leicht zu rechnen, dass

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} F(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{c}{t}\int_0^t \frac{x}{1+x}dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{c}{t}\int_0^t \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = \lim_{t\to\infty} = \frac{1}{2} + \frac{c}{t}\left(t - \log\left(1+t\right)\right) = \frac{1}{2} + c,\end{aligned}$$

und damit $c = \frac{1}{2}$.

b) Wir können rechnen, dass

$$\begin{aligned}P\left[X = -\frac{1}{4}\right] &= F\left(-\frac{1}{4}\right) - F\left(\left(-\frac{1}{4}\right)^-\right) = 0,\\ P[X=0] &= F(0) - F(0^-) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8},\\ P[0 < X \le 2] &= F(2) - F(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},\\ P\left[0 \le X < \frac{1}{2}\right] &= F\left(\left(\frac{1}{2}\right)^-\right) - F\left(0^-\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

c) Für $t \in (0,1]$ haben wir

$$\begin{aligned}P\left[Y \le t\right] &= P\left[X^2 \le t\right] = P\left[X \in \left[-\sqrt{t}, \sqrt{t}\right]\right] = F(\sqrt{t}) - F((-\sqrt{t})^-)\\ &= F(\sqrt{t}) - F(-\sqrt{t}) = \left(\frac{\sqrt{t}}{4} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{-\sqrt{t}}{16} + \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{16}\sqrt{t} + \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Für $t = 0$ bekommen wir hingegen

$$P\left[Y \le 0\right] = P\left[X = 0\right] = \frac{1}{8}.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Sei N die Anzahl Fische im Teich und X die Anzahl markierter Fische beim zweiten Fang. Es gibt $\binom{N}{15}$ Möglichkeiten, 15 Fische zu fangen. Die Anzahl Möglichkeiten, dass davon $k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ Fische markiert sind, ist gerade $\binom{10}{k}\binom{N-10}{15-k}$. Nach dem Laplace Model gilt daher

$$P_N\big(X = k\big) \;=\; \frac{\binom{10}{k}\binom{N-10}{15-k}}{\binom{N}{15}}.$$

Im Fall $X = 4$ erhalten wir

$$\begin{aligned} P_N\big(X = 4\big) &= \frac{\binom{10}{4}\binom{N-10}{11}}{\binom{N}{15}} \\ &= \frac{10!15!}{6!4!11!}\,\frac{(N-15)(N-16)\cdots(N-20)}{N(N-1)\cdots(N-9)}. \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck zu maximieren, betrachten wir

$$g(N) \overset{def}{=} \frac{P_N\big(X = 4\big)}{P_{N+1}\big(X = 4\big)} = \frac{(N-20)(N+1)}{(N-14)(N-9)}, \qquad \text{für } N \geq 20.$$

$P_N\big(X = 4\big)$ ist wachsend für $g < 1$ und nicht wachsend für $g \geq 1$. Mit einer einfachen Umformung sieht man, dass

$$g(N) \geq 1 \Leftrightarrow N \geq \frac{73}{2}.$$

Also ist $P_{37}\big(X = 4\big)$ maximal. 37 wäre also eine sinnvolle Schätzung der Anzahl Fische im Teich (diese Art von Schätzung nennt man übrigens "die Maximum-Likelihood-Methode").

4. **a)** Da Y uniform auf dem Intervall $\big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)$ verteilt ist, hat Y folgende Dichte:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{falls } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{y} \frac{1}{\pi}\,dt = \frac{t}{\pi}\bigg|_{t=-\pi/2}^{t=y} = \frac{y}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

Daraus erhalten wir die Verteilungsfunktion von Y:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y \leq -\pi/2, \\ \dfrac{y}{\pi} + \dfrac{1}{2} & \text{falls } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bitte wenden!

b) Wir schreiben X als Funktion von Y, und zwar $X = \tan(Y)$. Für die Verteilungsfunktion von X gilt daher

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\tan(Y) \leq x) = P(Y \leq \arctan(x)) = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2},$$

wobei wir in der letzten Gleichung verwendet haben, dass für alle x gilt, $\arctan(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Um die Dichte zu erhalten, leiten wir die rechte Seite nach x ab:

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)},$$

was der Cauchy-Verteilung entspricht.