Serie 5

1. Eine faire Münze wird dreimal geworfen. Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft in den ersten beiden Würfen Kopf oben liegt. Die Zufallsvariable Y gibt an, wie oft im dritten Wurf Kopf oben liegt. Bestimmen Sie die Verteilungen der Zufallsvariablen $X,\ Y,\ X+Y$ und $X-Y$.

2. Ein Nachrichtenkanal überträgt binäre Codewörter zu je 1024 Bits. Die einzelnen Bits werden unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $p = 10^{-3}$ falsch übertragen. Ein Wort wird genau dann richtig decodiert, wenn es drei oder weniger falsch übermittelte Bits enthält.
Es bezeichne X die Anzahl falsch übertragener Bits in einem Codewort.

a) Welche Verteilung besitzt X ?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Codewort richtig decodiert wird. Dazu ist die passende Approximation der Verteilung von X zu verwenden.

c) Eine Meldung bestehend aus 10 Wörtern wird übermittelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Wort falsch decodiert wird.

3. In einem Raum befinden sich 4 Computer vom Typ A und 6 vom Typ B. Während einer Arbeitsperiode von einer Stunde stürzen die Computer vom Typ A mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ab, die vom Typ B mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$. Drei Personen kommen zwischen 12.00 Uhr und 12.01 Uhr der Reihe nach in diesen Raum, wählen zufällig einen unbesetzten Computer und beginnen eine Stunde zu arbeiten. Niemand anders betritt danach den Raum.

a) Sei M die Anzahl von gewählten Computern des Typs A. Berechnen Sie $E[M]$.

b) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 aufeinander folgende Personen Computer vom Typ A gewählt haben. Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 Personen Computer vom Typ A gewählt haben.

c) Was ist die erwartete Anzahl Personen, deren Computer während der Arbeitsperiode von einer Stunde abstürzen?

Bitte wenden!

4. Einschluss-Ausschluss-Prinzip. Seien A_i, $i = 1, \dots, n$, beliebige Ereignisse, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. In Aufgabe 4 der Serie 2 haben Sie das Einschluss-Ausschluss-Prinzip durch Induktion bewiesen. Benutzen Sie nun die Eigenschaften des Erwartungswertes, um das Einschluss-Ausschluss-Prinzip zu zeigen:

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] \, .$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für beliebige Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ gilt :

$$1_{\{A_1 \cup \ldots \cup A_n\}} = 1 - \Pi_{i=1}^{n} \left(1 - 1_{A_i}\right) ,$$

wobei 1_A die Indikatorfunktion der Menge A ist, d.h. $1_A(\omega) = 1$ falls $\omega \in A$, und $1_A(\omega) = 0$ falls $\omega \notin A$.

Abgabe: Montag, den 11. April in der Übungsstunde oder im Fach im Raum HG E 66.

Einteilung in die Übungsgruppen:

Raum	**Assistent**
ETZ F 91	Bacchetta-Cattori, Mattia
ETZ H 91	Bolzern, Elias
HG G 26.3	Deprez, Philippe
ETZ J 91	Finaz, Julien
ML J 34.1	Paulus, Max
ML J 34.3	Schuurmans Stekhoven, Joy
HG F 26.3	Sepúlveda, Avelio