Musterlösung 2

1. a)

$$
\begin{aligned}
A &= \{(0,1,1,1),\ (1,0,1,1),\ (1,1,0,1),\ (1,1,1,0)\}\\
B &= \{(1,1,1,1),\ (0,1,1,1),\ (1,0,1,1),\ (1,1,0,1),\ (1,1,1,0),\\
&\qquad (0,0,1,1),\ (0,1,0,1),\ (1,0,0,1),\ (0,1,1,0),\ (1,0,1,0),\ (1,1,0,0)\}\\
C &= \{(0,0,0,0),\ (1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1),\\
&\qquad (1,0,1,0),\ (1,0,0,1),\ (0,1,0,1)\}
\end{aligned}
$$

b) Ω hat $2^4 = 16$ Elemente. Da alle Elementarereignisse (x_1, x_2, x_3, x_4) gleich wahrscheinlich sein sollen und sich die Wahrscheinlichkeiten zu Eins summieren müssen, haben alle Elementarereignisse die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$. Die Wahrscheinlichkeiten von A, B, C kann man somit bestimmen, indem man jeweils zählt, wieviele Elemente die Ereignisse haben. Also

$$P[A] = \frac{|\,A\,|}{|\,\Omega\,|} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4},\ P[B] = \frac{|\,B\,|}{|\,\Omega\,|} = \frac{11}{16} \text{ und } P[C] = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

2. Wir definieren folgende Ereignisse.

$$
\begin{aligned}
A &:= \{\text{Nur der Mann wird eingestellt.}\}\\
B &:= \{\text{Der Mann und eine Frau werden eingestellt.}\}\\
C &:= \{\text{Beide Frauen werden eingestellt.}\}\\
D &:= \{\text{Nur eine Frau (und kein Mann) wird eingestellt.}\}
\end{aligned}
$$

Dann gilt gemäss Aufgabenstellung

$$
\begin{array}{ccccccccl}
P[A] & + & P[B] & + & P[C] & + & P[D] & = 1.0\\
 & + & P[B] & + & P[C] & + & & = 0.9\\
P[A] & + & & + & P[C] & + & P[D] & = 0.1
\end{array}
$$

woraus $P[C] = 0$ folgt. Im probabilistischen Sinn ist es also nicht "möglich", dass beide Frauen eingestellt werden.

Bitte wenden!

3. a)

$$\begin{aligned} B_1 &= (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4) \cup A_5 \\ B_2 &= B_1^c = (A_1^c \cup A_2^c) \cap (A_3^c \cup A_4^c) \cap A_5^c \\ B_3 &= (A_1 \cup A_3) \cap (A_2 \cup A_4) \end{aligned}$$

b) Wir wählen daher als Grundraum Ω_4 (resp. Ω_5) die Menge der 0–1 Folgen der Länge 4 (resp. der Länge 5), d.h.

$$\Omega_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}\},$$

$$(\text{resp.}\Omega_5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0,1\}\}).$$

Dabei bedeutet $x_i = 1$, dass der i-te Schalter offen ist, und $x_i = 0$, dass der i-te Schalter geschlossen ist. Nun können wir die Ereignisse B_1 und B_3 als Teilmengen von Ω_5 und Ω_4 auffassen:

$$\begin{aligned} B_1 = \{&(1,1,1,1,0), (1,1,1,0,0), (1,1,0,1,0), (1,0,1,1,0), (0,1,1,1,0), (1,1,0,0,0), \\ &(1,0,1,0,0), (0,1,1,0,0), (1,0,0,1,0), (0,1,0,1,0), (0,0,1,1,0), (1,0,0,0,0), \\ &(0,1,0,0,0), (0,0,1,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,0), (0,0,1,1,1), (0,0,0,1,1), \\ &(0,0,1,0,1), (0,0,0,0,1), (1,1,0,0,1), (1,0,0,0,1), (0,1,0,0,1)\} \subseteq \Omega_5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3 = \{&(0,0,1,1), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (0,0,0,0), (0,1,1,0), (0,1,0,0), \\ &(1,0,0,1), (1,0,0,0), (1,1,0,0)\} \subseteq \Omega_4. \end{aligned}$$

Analog zur Aufgabe 1 b) finden wir also, dass

$$P[B_1] = \frac{|B_1|}{|\Omega|} = \frac{23}{32}, \quad P[B_3] = \frac{|B_3|}{|\Omega|} = \frac{9}{16}.$$

4. Im Fall $n = 1$ besagt die Formel $P[A_1] = P[A_1]$. Dies liefert uns schon die Induktionsverankerung.

Für den Induktionsschritt brauchen wir explizit den Fall $n = 2$. Dieser Fall entspricht genau Formel (1.2.14) im Skript:

$$P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 \cap A_2].$$

Wir nehmen also an, die Formel stimme für Werte bis $n \geq 2$. Formel (1.2.14) ergibt

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right] = P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right] = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] + P[A_{n+1}] - P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right].$$

Siehe nächstes Blatt!

Wegen der Induktionsvoraussetzung haben wir einerseits

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} P[A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}]$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
P\left[\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\cap A_{n+1}\right] &= P\left[\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\cap A_{n+1})\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} P[(A_{i_1}\cap A_{n+1})\cap\cdots\cap(A_{i_k}\cap A_{n+1})] \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} P[A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\cap A_{n+1}] \\
&= \sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k-2}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k=n+1} P[A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{k-1}}\cap A_{i_k}].
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right] &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} P[A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}] + P[A_{n+1}] \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k=n+1} P[A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}] \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} P[A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k=n+1} P[A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}] \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n+1} P[A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}].
\end{aligned}$$