Stichworte zur Vorlesung Algebra I, Herbstsemester 2012

Teil A: Gruppen

1. Der Gruppenbegriff

- Axiome mit beidseitigem Einselement und beidseitigem Inversen
- Halbgruppe, Monoid, Gruppe
- äquivalente Formulierungen
- Linkseins = Rechtseins = eindeutig bestimmt
- Linksinverses = Rechtsinverses = eindeutig bestimmt
- Rechenregel: $(g^{-1})^{-1} = g$
- Rechenregel: $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$
- Kürzungsregel: $xg=xh \Rightarrow g=h$, entsprechend rechts.
- abelsche/kommutative Gruppe
- ... wird dann oft additiv geschrieben. Aber nur dann!
- Potenz g^m
- Rechenregel: $g^m g^n = g^{m+n}$
- Rechenregel: $(g^m)^n = g^{mn}$
- Rechenregel: $(gh)^n = g^n h^n$ falls g,h kommutieren, sonst i.a. nicht!
- Gruppenordnung $|G|$
- Ordnung eines Elements
- zyklische Gruppe
- Beispiel: additive Gruppe eines Vektorraums, Körpers, Rings
- Beispiel: multiplikative Gruppe eines Körpers, Rings
- Beispiel: Matrizengruppen $GL_n(K)$, $SL_n(K)$, $O_n(K)$, $SO_n(K)$
- Beispiel: Symmetriegruppe eines Körpers im $\mathbb{R}^n$
- Gruppentafel, Eigenschaften, aber ineffiziente Beschreibung
- Beispiel: Gruppentafel von Z_4 und D_3.

2. Untergruppen

- Definition
- Der Durchschnitt jeder Kollektion von Untergruppen ist eine Untergruppe
- Vereinigung aber nicht!
- Erzeugnis einer Teilmenge S
- ... äussere Beschreibung als kleinste Untergruppe, die S enthält
- ... innere Beschreibung durch Wörter
- zyklische Gruppe
- Zentrum $Z(G)$
- Zentralisator $Z_G(g)$ oder G_g

3. Ordnung, Index, Exponent

- Rechnen mit Teilmengen
- ... $XY := \{xy \mid x\in X, y\in Y\}$
- ... $gX := \{g\}X$, $Xg := X\{g\}$
- ... offenbar assoziativ, weitere Grundregeln
- Multiplikation $X\to gX$ ist bijektiv!
- Linksnebenklassen gH
- ... sind disjunkt und gleich mächtig
- Menge der Linksnebenklassen G/H
- Def. Index einer Untergruppe $[G:H]$:= Kardinalität der Menge G/H

- Rechtsnebenklassen Hg
- Bijektion zwischen $H\backslash G$ und G/H via $(Hg)^{-1} = g^{-1}H$
- Satz (Lagrange): $|G| = |H| \times [G:H]$
- Folge: Index und Ordnung von H teilen die Ordnung von G.
- Satz: Index ist multiplikativ: $[G:K] = [G:H] [H:K]$
- Folge 1: Die Ordnung jedes Elements teilt die Gruppenordnung.
- Folge 2: Ist $|G|$ prim, so ist G zyklisch von jedem nichttrivialen Element erzeugt.
- Def. Exponent
- Folge 3: Exponent teilt Gruppenordnung
- Exponent endlich impliziert nicht, dass Gruppe endlich
- Übung: Exponent | 2 => G abelsch

4. Homomorphismen
- Definition: $\phi(gg') = \phi(g) \phi(g')$
- Jeder Homomorphismus erfüllt $\phi(e)=e$ und $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$.
- Bild(ϕ) ist Untergruppe
- surjektiv <=> Bild alles
- Kern(ϕ) ist Untergruppe
- injektiv <=> Kern=1
- Die Komposition zweier Homomorphismen ist ein Homomorphismus.
- Def. Ein Homomorphismus mit beidseitigem Inversen ist ein Isomorphismus.
- Prop.: Ein Homomorphismus ist ein Isomorphismus genau dann, wenn er bijektiv ist.
- Alle inneren Eigenschaften sind invariant unter Isomorphismen, z.B.: Ordnung, Kommutativität, etc. etc.
- Die Komposition zweier Isomorphismen ist ein Isoomorphismus.
- Die identische Abbildung $G\to G$ ist ein Isomorphismus.
- Def. Automorphismus
- Def. Automorphismengruppe Aut(G)
- Beispiel: Aut(ZZ) = $\{\pm1\}$
- innere Automorphismen
- Der Homomorphismus $G\to \mathrm{Aut}(G)$, $g\mapsto int_g$

5. Normalteiler, Faktorgruppen
- Def. normale Untergruppe = Normalteiler, wenn $\forall g\in G: gNg^{-1}=N$
- äquivalent: $\forall g\in G: gNg^{-1} \subset N$
- äquivalent: $\forall g\in G: gN=Ng$
- äquivalent: $G/N = N\backslash G$.
- Bezeichnung $H<G$ und $N\triangleleft G$
- Bem.: $<$ ist transitiv, aber $\triangleleft$ nicht.
- Def. subnormale Untergruppe
- Der Kern jedes Homomorphismus ist normal.
- Beispiel: Jede Untergruppe vom Index 2 ist normal.
- Def. Faktorgruppe, Quotient G/N
- Beispiel: ZZ/nZZ für eine natürliche Zahl $n>0$.
- Fakt: Jede zyklische Gruppe ist isomorph zu (ZZ,+) oder (ZZ/nZZ,+) für eine natürliche Zahl $n>0$.
- Insbesondere sind je zwei zyklische Gruppen derselben Ordnung isomorph. Bezeichnung: Z_n oder C_n
- Aut(ZZ/nZZ) = (ZZ/nZZ)^*

- Universelle Eigenschaft bzgl. Homomorphismen \phi:G\to H mit N \subset Kern(phi)
- Jeder Homomorphismus induziert einen Isomorphismus G/\Kern(\phi) \to Bild (\phi)
- Erster Isomorphiesatz: (a) Die Untergruppen von G/N sind genau die H/N für Untergruppen H von G, die N enthalten. (b) H/N ist normal in G/N genau dann, wenn H normal in G ist. (c) In diesem Fall gilt (G/N)/(H/N) \cong G/H
- Zweiter Isomorphiesatz: Für beliebiges H ist H\cap N normal in H und HN eine Untergruppe von G und es gilt H/(H\cap N) = HN/N
- Bsp: In einer abelschen Gruppe ist jede Untergruppe normal
- Bsp: Die Untergruppen von ZZ sind genau die nZZ für n\ge0.
- Für teilerfremde n,m>0 haben wir einen Isomorphismus nZZ/nmZZ \to ZZ/mZZ.
- Übung: Kommutatoruntergruppe [G,G]
- Übung: G/H abelsch <=> [G,G] \subset H
- Insbesondere G abelsch <==> [G,G]=1

6. Operationen

- Def. Links-Operation (-Aktion)
- Bsp. Linkstranslation auf G
- Def. Rechts-Operation
- Äquivalenz zur Links-Operation via g^{-1}
- symmetrische Gruppe S(X) einer Menge X
- Links-Operation äquivalent zu Homomorphismus G\to S(X)
- Operation auf einer Gruppe <=> Homomorphismus G\to Aut(H)
- Lineare Operation auf einem Vektorraum = lineare Darstellung von G <=> Homomorphismus G\to GL(V)
- Def. Bahn (orbit)
- Bahnen sind paarweise disjunkt
- Punktstabilisator Stab_G(x) = G_x
- Bahnengleichung G/G_x \isoto Gx
- transitive Operation
- n-fach transitivie Operation
- freie Operation
- treue Operation
- Fixpunktmenge X^G
- Beispiel: Translation auf G ist transitiv und frei
- Beispiel: Translation auf G/H ist transitiv
- Beispiel: Konjugation auf G, Bahnen=Konjugationsklassen, Punktstabilisator = Zentralisator, Fixpunkte unter ganz G = Zentrum
- Beispiel: Konjugation auf der Menge aller Untergruppen von G, Punktstabilisator heisst Normalisator, Fixpunkte unter G sind genau die normalen Untergruppen von G.

7. Die symmetrische Gruppe

- Def. S_n := S(\{1,...,n\})
- Jede endliche Untergruppe ist isomorph zu einer Untergruppe einer S_n (Cayley)
- Ordnung von S_n ist n!
- Beschreibung einer Permutation durch ihre Wertetafel
- oder als Produkt disjunkter Zykel

- Rechnen mit Zykeln: Inverses, Komposition, Konjugation
- Konjugationsklassen <—> Partitionen von n
- Transposition
- Jede Permutation ist ein Produkt von Transpositionen
- Deren Anzahl modulo 2 ist eindeutig bestimmt.
- Signum-Homomorphismus $S_n \to \{\pm1\}$
- Sein Kern ist die alternierende Gruppe A_n
- Jeder k-Zykel hat Signum $(-1)^{k-1}$
- Jedes Element von A_n ist ein Produkt von 3-Zykeln.
- Je zwei 3-Zykel sind konjugiert unter A_n, falls $n\ge5$
- Satz: A_n ist einfach für $n\ge5$
- Beschreibung von S_n und A_n für $n<5$
- Kleinsche Vierergruppe in S_4 mit Faktorgruppe isomorph zu S_3
- Bem.: Die Untergruppen der Ordnung 2 in der Kleinschen Vierergruppe sind subnormal in S_4, aber nicht normal.

8. Strukturtheorie
- einfache Gruppe
- Eine abelsche Gruppe ist einfach g.d.w. sie zyklisch der Primzahlordnung ist.
- *Beispiel:* A_n ist einfach für $n\ge5$.
- *Beispiel*: $SL_2(K)/\{\pm1\}$ ist einfach für jeden Körper K mit $|K| \ge4$. (ohne Beweis)
- *Beispiel*: $SL_n(K)$/Skalare ist einfach für jeden Körper K und jedes $n>2$. (ohne Beweis)
- Subnormalreihe
- auflösbare Gruppe
- *Beispiel*: Die Diedergruppe ist auflösbar.
- *Beispiel*: Die symmetrische Gruppe S_n ist auflösbar genau für $n\le 4$.
- Jede Untergruppe und jede Faktorgruppe einer auflösbaren Gruppe ist auflösbar.
- Verfeinerung einer Subnormalreihe
- Kompositionsreihe
- Jede endliche Gruppe besitzt eine Kompositionsreihe
- äquivalente Subnormalreihen
- Verfeinerungssatz von Schreier
- Satz von Jordan-Hölder
- Analogie: einfache Gruppen <--> Primzahlen, Jordan-Hölder <--> eindeutige Primfaktorzerlegung.
- Schmetterlingslemma

9. Universelle Konstruktionen
- äusseres direktes Produkt
- inneres direktes Produkt
- äusseres semidirektes Produkt
- inneres semidirektes Produkt
- *Beispiel*: D_n, S_n, etc.
- *Gegenbeispiel*: Quaternionengruppe
- *Beispiel*: Parabolische Matrizengruppen
- Freie Gruppe F_X über einer Menge X
- Freie Gruppe mit n Erzeugenden F_n
- Universelle Eigenschaft

- reduzierte Wörter
- Gruppe mit Erzeugenden und Relationen
- Pushout, Amalgamiertes Produkt
- Freies Produkt

10. Sylowsätze

- Im Folgenden sei p eine Primzahl
- Eine endliche Gruppe von p-Potenz Ordnung heisst p-Gruppe
- Satz: Jede nichttriviale p-Gruppe hat nichttriviales Zentrum
- Folge: Jede p-Gruppe ist auflösbar
- *Übung*: Sei H eine echte Untergruppe einer p-Gruppe G. Dann ist ihr Normalisator echt grösser als H
- *Übung*: Jede Gruppe der Ordnung p^2 ist abelsch
- Definition von p-Sylow-(Unter-)Gruppe und der Menge $Syl_p(G)$ aller solchen
- Sylowsätze (a): G besitzt eine p-Sylowgruppe
- (b) Jede p-Untergruppe ist in einer p-Sylowgruppe enthalten
- (c) Alle p-Sylowgruppen sind alle konjugiert
- (d) Ihre Anzahl ist $\equiv 1 \mod p$ und ein Teiler von $|G|$
- Folge: Jede endliche abelsche Gruppe mit Ordnung ein Vielfaches von p besitzt Elemente der Ordnung p
- Prop.: Jede Gruppe der Ordnung pq, pq^2, pqr für Primzahlen p,q,r ist auflösbar
- Satz von Burnside: Jede Gruppe der Ordnung $p^a q^b$ ist auflösbar. (ohne Beweis)
- Lemma 1: Eine nichtabelsche einfache Gruppe besitzt keine Untergruppe vom Index 2, 3, oder 4.
- Prop: Jede Gruppe der Ordnung <60 ist auflösbar.
- Lemma 2: Jede nichtabelsche einfache Gruppe mit einer Untergruppe vom Index 5 ist isomorph zur A_5.
- Prop.: Jede einfache Gruppe der Ordnung 60 ist isomorph zu A_5.

11. Klassifikation

- Satz von Feit-Thompson (1963): Jede endliche Gruppe ungerader Ordnung ist auflösbar (Beweis etwa 270 Seiten)
- Involution = Element der Ordnung 2
- Je zwei Involutionen erzeugen eine Diedergruppe
- Brauer-Programm: Studiere nichtabelsche endliche einfache Gruppen via ihrer Involutionen und deren Zentralisatoren
- Klassifikation der nichtabelschen endlichen einfachen Gruppen (Skizze)
- Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen (Vorwärtsverweis)