Stichworte zur Vorlesung Algebra I, Herbstsemester 2008
und Algebra II, Frühjahrssemester 2009

Teil B: Ringe

1. Der Ringbegriff

- Axiome
- Rechenregeln
- *Vorsicht:* Der Begriff`Algebra' ist nicht ganz synonym zu `Ring'. Es gibt auch nicht assoziative Algebren, zum Beispiel Lie-Algebren.
- kommutativer / nichtkommutativer Ring
- *Beispiel:* Matrizenring
- unitärer Ring = Ring mit Eins
- *Vorsicht:* Ich erlaube 1=0.
- *Fakt:* 1=0 genau dann, wenn der Ring der Nullring ist.
- Einheitengruppe
- Schiefkörper, Divisionsring, Divisionsalgebra
- *Beispiel:* Hamiltonsche Quaternionen
- Körper
- **Ab hier sind alle Ringe kommutativ und unitär** (und alle Homomorphismen unitär)
- Homomorphismus
- Isomorphismus
- Homomorphismus induziert Homomorphismus der Einheitengruppen
- Jeder Körperhomomorphismus ist injektiv
- Direktes Produkt von Ringen
- Ring von Funktionen auf einer Menge
- Ringe stetiger, diff'barer, holomorpher Funktionen
- Unterring
- *Beispiel:* ZZ \subset IQ \subset IR \subset IC
- Erzeugter Unterring R[x_1,...,x_n]
- *Beispiel:* ZZ[i]

2. Polynomringe

- Polynomfunktion
- Konstruktion des Polynomrings
- Universelle Eigenschaft
- Auswertungsabbildung
- Funktorialität
- Unterschied zu Polynomfunktionen

3. Integritätsbereiche

- Nullteiler
- nullteilerfrei
- Integritätsbereich
- Kürzungsregel
- Quotientenkörper
- universelle Eigenschaft
- *Beispiel:* rationale Zahlen = \Quot(ZZ)

- *Beispiel:* \Quot(ZZ[i]) = IQ[i]
- Grad eines Polynoms
- Eigenschaften
- Polynomring über Integritätsbereich ist Integritätsbereich
- Körper der rationalen Funktionen
- *Übung:* Körper der formalen Laurentreihen mit endlichem Hauptteil
- *Beispiel:* Körper der meromorphen Funktionen auf einer zusammenhängenden offenen Teilmenge U\subset IC

4. Ideale, Faktorringe

- Ideal
- Hauptideal Ra = (a)
- Nullideal
- Einsideal
- (a) = (1) <=> a Einheit
- erzeugtes Ideal (a_1,...,a_n)
- Summe, Durchschnitt, Produkt von Idealen
- Bild jedes Homomorphismus ist ein Unterring
- Kern jedes Homomorphismus ist ein Ideal
- Faktorring
- universelle Eigenschaft des Faktorrings
- Homomorphiesatz
- *Beispiel:* Ideale von ZZ und Faktorringe ZZ/nZZ
- *...* Einheitengruppe von ZZ/nZZ
- ... ZZ/nZZ ist Integritätsbereich <=> n=0 oder Primzahl
- ... ZZ/nZZ ist Körper <=> n=Primzahl. Bezeichnung IF_p
- Charakteristik eines Rings
- Die Charakteristik jedes Körpers ist 0 oder Primzahl
- Primideal
- äquivalent: Faktorring ist Integritätsbereich
- maximales Ideal
- äquivalent: Faktorring ist Körper
- Folge: Jedes maximale Ideal ist Primideal
- partial-, total-, induktiv geordnete Menge
- Lemma von Zorn
- Jedes echte Ideal ist in einem maximalen Ideal enthalten
- Jeder nichttriviale Ring besitzt ein maximales Ideal

5. Teilbarkeit in Integritätsbereichen

- Definition `a teilt b'
- Definition `a assoziiert zu b'
- Grundeigenschaften
- unzerlegbares = irreduzibles Element
- Primelement
- prim ==> irreduzibel
- a prim <=> Hauptideal (a) ist Primideal
- faktorieller Ring (=ZPE-Ring)
- Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung
- R faktoriell und p irreduzibel ==> p prim
- Repräsentantensystem der Primelemente
- grösster gemeinsamer Teiler ggT

- teilerfremde Elemente
- kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV
- Hauptidealring
- ... ist faktoriell
- ... ggT erzeugt gemeinsames Ideal
- Euklidischer Ring
- ... Division mit Rest
- ... ist Hauptidealring
- *Beispiel:* ZZ, K[X], K[[X]]
- euklidischer Algorithmus
- *Beispiel:* ZZ[\sqrt{-d}] ist faktoriell für d=1, 2, aber nicht für d>2.

6. Teilbarkeit in Polynomringen
- Nullstellen und Abspaltung von Linearfaktoren
- Anzahl der Nullstellen eines Polynoms über einem Integritätsbereich
- algebraisch abgeschlossener Körper
- Hauptsatz für die Algebra
- Inhalt eines Polynoms I(f)
- primitives Polynom I(f)=1
- Gauss Lemma I(fg) =I(f) I(g)
- Satz: R faktoriell => R[X] faktoriell, und die Primelemente von R[X] sind die von R zusammen mit den primitiven Polynomen, die in Quot(R)[X] prim sind.
- Folge: K[X_1,...,X_n] ist faktoriell
- Reduktions-Kriterium: f mod p irreduzibel ==> f irreduzibel.
- Eisenstein-Kriterium für Irreduzibilität
- *Beispiel:* Kreisteilungspolynom 1+X+...+X^{p-1}
- *Übung:* Explizite Primfaktorzerlegung von Polynomen nach Kronecker

7. Elementarteilersatz
- Elementarteilersatz für Matrizen über einem Hauptidealring
- Eindeutigkeit der Elementarteiler
- Chinesischer Restsatz über einem Hauptidealring

8. Moduln über Hauptidealringen
- Definition R-Modul
- *Beispiel:* ZZ-Modul = abelsche Gruppe
- *Beispiel:* K-Modul = Vektorraum
- *Beispiel:* K[X]-Modul = Vektorraum zusammen mit Endomorphismus
- Direkte Summe
- freier Modul R^n
- Homomorphismus, Isomorphismus, Endomorphismus, Automorphismus
- Untermodul
- Erzeugnis
- endlich erzeugter Modul
- endlich erzeugte Untermoduln
- Faktormodul
- Ist jedes Ideal von R endlich erzeugt, so ist jeder Untermodul von R^n endlich erzeugt
- Hauptsatz für endlich erzeugte Moduln über einem Hauptidealring
- Eindeutigkeit der Elementarteiler (ohne Beweis)
- Eindeutigkeit des freien Rangs

- endlich erzeugte Torsionsmoduln
- *Beispiel:* ZZ ---> Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen
- *Beispiel:* K[X] ---> Jordansche Normalform

Ab hier Algebra II, Frühjahrssemester 2009

9. Symmetrische Funktionen

- Symmetrische Polynome
- Elementarsymmetrische Polynome
- Hauptsatz dazu
- Symmetrische rationale Funktionen
- Hauptsatz dazu

10. Diskriminante und Resultante

- Diskriminante
- Resultante
- ... via symmetrische Polynome
- ... via Sylvestermatrix
- Vergleich mit Vandermonde-Determinante
- formale Ableitung eines Polynoms
- Ableitungsregeln
- Diskriminante als Resultante von f und f'