ANALYSIS I – KAPITEL I
WICHTIGE BEGRIFFE

EMMANUEL KOWALSKI

Logik

($\star$) Logische Symbole $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
($\star$) Quantoren $\forall$, $\exists$

Mengenlehre

($\star$) x gehört A: $x \in A$, B is eine Teilmenge von A: $B \subset A$; Leermenge $\emptyset$.
($\star$) Vereinigung $\cup$, Durchschnitt $\cap$, Kartesisches Produkt $A \times B$, Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$, Differenz $A \setminus B$
($\star$) Aussonderungsaxiom: $\{x \in A \mid P(x) \text{ is wahr}\} \subset A$ is eine Menge.

Abbildungen

($\star$) $f : X \longrightarrow Y$ Abbildung von X nach Y.
($\star$) *Graph* $G_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$.
($\star$) $f : X \longrightarrow Y$ *ist gleich* $g : X_1 \longrightarrow Y_1$ genau dann, wenn $X = X_1$, $Y = Y_1$ und $G_f = G_g$.
($\star$) $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$; Verkettung $g \circ f : X \longrightarrow Z$.
($\star$) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.
($\star$) Identitätsabbildung: $\mathrm{Id}_X : X \longrightarrow X$.
($\star$) $a \in X$ *Urbild* von $b \in Y$: $f(a) = b$.
($\star$) *Injektive Abbildung*: höchstens ein Urbild (Beispiel: Inklusionsabbildung).
($\star$) *Surjektive Abbildung*: mindestens ein Urbild (Beispiel: Projektion, Faktorabbildung).
($\star$) *Bijektive Abbildung*: genau ein Urbild (Beispiel: Identitätsabbildung).
($\star$) *Umkehrabbildung* f^{-1} einer Bijektion $f : X \longrightarrow Y$: $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X$.
($\star$) *Bild einer Teilmenge*: $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung;

$$\underline{f} : \begin{cases} \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y) \\ A \mapsto \{b \in Y \mid \exists a \in A,\ f(a) = b\} \end{cases}$$

($\star$) *Urbildabbildung*: $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung;

$$\underline{f}^{-1} : \begin{cases} \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ B \mapsto \{a \in X \mid f(a) \in B\}. \end{cases}$$

Relationen

($\star$) R *Relation zwischen* X and Y: $R \subset X \times Y$
($\star$) *Reflexive Relation*: xRX (Beispiele: $=$, $\leqslant$, $\subset$).
($\star$) *Symmetrische Relation*: xRy genau dann, wenn yRx (Beispiel: $=$).
($\star$) *Anti-symmetrische Relation*: $(xRy \wedge yRx) \longrightarrow (x = y))$ (Beispiele: $\leqslant$, $\subset$).
($\star$) *Transitive Relation*: $(xRy \wedge yRz) \longrightarrow (xRz)$ (Beispiele: $=$, $\leqslant$, $\subset$).

Date: October 7, 2013, 7:31.

($\star$) *Äquivalenzrelation* $\sim$ auf X: reflexiv, symmetrisch, transitiv (Beispiel: $f : X \longrightarrow Y$ und $x \sim y$ genau dann, wenn $f(x) = f(y)$).
($\star$) *Äquivalenzklass* $[a]_\sim = \{b \in X \mid x \sim y\}$.
($\star$) Satz: $a \sim b$ genau dann, wenn $[a]_\sim = [b]_\sim$; $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$ falls $\neg(a \sim b)$.
($\star$) *Faktormenge*: $X/\sim = \{C \in \mathcal{P}(X) \mid \exists a \in X\ C = [a]_\sim\} \subset \mathcal{P}(X)$
($\star$) *Faktorabbildung*:

$$p \begin{cases} X \longrightarrow X/\sim \\ a \mapsto [a]_\sim \end{cases}$$

surjektiv.
($\star$) $a \sim b$ genau dann, wenn $p(a) = p(b)$.
($\star$) *Ordungsrelation* $\leqslant$: reflexiv, anti-symmetrisch und transitiv.
($\star$) X *linear geordnet*: $\forall x \in X,\ \forall y \in X,\ (x \leqslant y \vee y \leqslant x)$.
($\star$) Warnung! $\subset$ auf $\mathcal{P}(X)$ ist normalerweise nicht linear geordnet.
($\star$) $\leqslant$ Ordungsrelation auf X; *Maximum* $a \in X$: $\forall b \in X, (a \leqslant b \longrightarrow b = a)$; *Minimum* $a \in X$: $\forall b \in X,\ (b \leqslant a \longrightarrow b = a)$; $a \in X$ *obere Schranke* von $Y \subset X$: $\forall b \in Y,\ b \leqslant a$; $a \in X$ *untere Schranke* von $Y \subset X$: $\forall b \in Y,\ a \leqslant b$.

ETH Zürich – D-MATH, Rämistrasse 101, CH-8092 Zürich, Switzerland
E-mail address: `kowalski@math.ethz.ch`