ANALYSIS I – KAPITEL II
WICHTIGE BEGRIFFE

EMMANUEL KOWALSKI

Die Menge R

($\star$) Addition $(+)$, Multiplikation $(\cdot, \times)$, Ordnungsrelation $(\leqslant)$.
($\star$) $\mathbf{R}$ is linear geordnet: $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R}, (x \leqslant y) \vee (y \leqslant x)$.
($\star$) Vollständigkeit: falls X, $Y \subset \mathbf{R}$, nicht leer, und $x \leqslant y$ für all $x \in X$ und $y \in Y$, dann gibt es $z \in \mathbf{R}$ sodass $x \leqslant z \leqslant y$ für $(x, y) \in X \times Y$.

Kleinste obere Schranke

($\star$) Falls $X \subset \mathbf{R}$ ist nicht leer und von oberen beschränkt, dann existiert die kleinste obere Schranke $\sup X$.
($\star$) Falls $X \subset \mathbf{R}$ ist nicht leer und von unteren beschränkt, dann existiert die grösste untere Schranke $\inf X$.

$\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$

($\star$) *Induktionsprinzip*: falls $E \subset \mathbf{N}$ erfüllt $1 \in E$ und $(\forall n \in \mathbf{N},\ (n \in E \rightarrow n+1 \in E))$, dann ist $E = \mathbf{N}$.
($\star$) Eine nicht leer Teilmenge $E \subset \mathbf{N}$ hat (genau) ein Minimum $\mathrm{Min} E$.

Archimedische Prinzip, $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$

($\star$) Für $h > 0$, $x \in \mathbf{R}$, es gibt $k \in \mathbf{Z}$ so dass $(k-1)h \leqslant x < kh$.
($\star$) Für alle x, $y \in \mathbf{R}$ sodass $x < y$, es gibt eine rationale Zahl z sodass $x < z < y$.

Absolutbetrag, Abstand

($\star$) $|x|$, $d(x, y) = |x - y|$; $|x| \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y$.
($\star$) *Dreiecksungleichung*: $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Intervalle

($\star$) $[a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}$.
($\star$) *Umgebung* U einer Zahl $x \in \mathbf{R}$: $x \in U$ und es gibt $c > 0$ sodass $]x - c, x + c[\subset U$.

Mächtigkeit

($\star$) Mengen X und Y sind *gleichmächtig* $\Leftrightarrow$ es gibt eine Bijection $f : X \longrightarrow Y$.
($\star$) X und $\mathcal{P}(X)$ sind nicht gleichmächtig.
($\star$) X ist abzählbar $\Leftrightarrow$ X is mit $\mathbf{N}$ gleichmächtig.
($\star$) $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sind abzählbar; $\mathbf{R}$ ist nicht abzählbar.
($\star$) $E \subset X$, X abzählbar und E unendlich $\Rightarrow$ E is abzählbar.

ETH Zürich – D-MATH, Rämistrasse 101, CH-8092 Zürich, Switzerland
E-mail address: `kowalski@math.ethz.ch`

Date: October 15, 2013, 12:31.