ANALYSIS I – KAPITEL III
WICHTIGE BEGRIFFE

EMMANUEL KOWALSKI

Konvergenz

($\star$) $u = (u_n)$ konvergiert gegen $a \in \mathbf{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - a| < \varepsilon.$$

($\star$) Die Reihe $\sum u_n$ konvergiert und hat Summe a:

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} u_n = a.$$

($\star$) Ein konvergente Folge ist beschränkt.

($\star$) Falls $u = (u_n)$ ist wachsend ($u_{n+1} \geqslant u_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$), dann konvergiert u genau dann, wenn u is von oben beschränkt:

$$\exists M \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}, u_n \leqslant M.$$

Dann ist $\lim u_n = \sup\{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ und

$$\lim_{n \to +\infty} u_n \leqslant M.$$

($\star$) Falls $u = (u_n)$ mit $u_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbf{N}$, dann konvergiert die Reihe $\sum u_n$, wenn

$$\exists M \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N}, \sum_{i=1}^{n} u_n \leqslant M.$$

($\star$) Falls $|u_n - a| \leqslant v_n$ und $v_n \to 0$, dann ist a den Grenzwert von u.

($\star$) Falls $u_n \leqslant v_n$ für alle n und $u_n \to a$, $v_n \to b$, dann ist $a \leqslant b$.

Häufungspunkte

($\star$) $v = (v_k)$ is eine Teilfolge von $u = (u_n)$: $v_k = u_{n_k}$ wo

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

($\star$) $a \in \mathbf{R}$ ist ein Häufungspunkt von $u = (u_n)$:

$$a \text{ is den Grenzwert einer Teilfolge von } u$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbf{N},\ \exists n \geqslant n_0,\ |u_n - a| < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \text{die Menge } \{n \in \mathbf{N} \mid |u_n - a| < \varepsilon\} \text{ is unendlich.}$$

($\star$) Satz von Bolzano-Weierstrass: jede beschränkte Folge $u = (u_n)$ hat mindestens ein Häufungspunkt.

Date: October 29, 2013, 14:46.

Cauchy Kriterium

($\star$) $u = (u_n)$ ist eine Cauchy Folge:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall m \geqslant n_0,\ |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

($\star$) Satz von Cauchy: jede Cauchy Folge konvergiert.
($\star$) $\sum u_n$ ist eine Caucy Reihe:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall p \geqslant 1,\ \Big| \sum_{i=n+1}^{p} u_n \Big| < \varepsilon.$$

Absolut Konvergenz

($\star$) Die Reihe $\sum u_n$ konvergiert absolut $\Leftrightarrow$ die Reihe $\sum |u_n|$ konvergiert.
($\star$) Jede absolut konvergente Reihe $\sum u_n$ konvergiert und

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|.$$

($\star$) Falls $|u_n| \leqslant v_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$ und $\sum v_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum u_n$ absolut und

$$\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.$$

($\star$) $u = (u_n)$ sodass $u_n \neq 0$ für alle n und

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow a \in [0, +\infty[.$$

Fall $0 \leqslant a < 1$, ist $\sum u_n$ absolute konvergent. Falls $a > 1$, divergiert $\sum u_n$.
($\star$) $\varphi : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ bijektive Abbildung; falls $\sum u_n$ absolut konvergent ist, ist $\sum u_{\varphi(n)}$ auch absolut konvergent und

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

($\star$) $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ sodass

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty} |u_{m,n}|\Big)$$

konvergiert, oder

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |u_{m,n}|\Big)$$

konvergiert. Dann konvergieren die Reihen

$$s_n = \sum_{m=1}^{+\infty} u_{m,n}, \qquad t_m = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{m,n},$$

und

$$\sum_{n=1}^{+\infty} s_n, \qquad \sum_{m=1}^{+\infty} t_m,$$

alle absolut, und

$$\sum_{m=1}^{\infty} t_m = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n.$$

($\star$) Falls $\sum u_n$ und $\sum v_n$ absolut konvergent sind, dann ist $\sum w_n$ absolute konvergent, wo

$$w_n = u_1 v_n + \cdots + u_n v_1 = \sum_{i=1}^{n} u_i v_{n+1-i}$$

und

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\Big).$$

Wichtige Beispiel

($\star$) Die Reihe $\sum \frac{1}{n}$ divergiert.
($\star$) Die Reihe $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert, aber konvergiert nicht absolut.
($\star$) Die Reihe $\sum x^n$ konvergiert genau dann, wenn $|x| < 1$ und

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ für } |x| < 1.$$

($\star$) Die Reihe $\sum \frac{1}{n^t}$ konvergiert für $t > 1$.

ETH Zürich – D-MATH, Rämistrasse 101, CH-8092 Zürich, Switzerland
E-mail address: kowalski@math.ethz.ch