ANALYSIS I – KAPITEL IV
WICHTIGE BEGRIFFE

EMMANUEL KOWALSKI

Stetigkeit

($\star$) Abstände in $\mathbf{R}^k$:

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|, \quad d_2(x,y) = \Bigl(\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|^2\Bigr)^{1/2}, \quad d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}.$$

($\star$) Für $d \in \{d_1, d_2, d_\infty\}$, es gilt

$$d(x,y) \geqslant 0, \qquad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$
$$d(x,y) = d(y,x)$$
$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z).$$

($\star$) Umgebung U von $x \in \mathbf{R}^k$: es gibt $\varepsilon > 0$ sodass

$$\{y \in \mathbf{R}^k \mid d(x,y) < \varepsilon\} \subset U.$$

($\star$) $E \subset \mathbf{R}^k$; ($U \subset E$ ist eine Umbegung in E von $x \in E$) $\Leftrightarrow$ (es gibt $\varepsilon > 0$ sodass

$$E \cap \{y \in \mathbf{R}^k \mid d(x,y) < \varepsilon\} \subset U).$$

($\star$) $E \subset \mathbf{R}^k$; ($U \subset E$ ist offen in E) $\Leftrightarrow$ (für jede $x \in U$, es gibt eine Umgebung V von x in E sodass $V \subset U$.)
($\star$) $E \subset \mathbf{R}^k$; ($C \subset E$ ist abgeschlossen in E) $\Leftrightarrow$ ($U = E - C$ ist offen in E).
($\star$) $E \subset \mathbf{R}^k$, $F \subset \mathbf{R}^m$, $f : E \longrightarrow F$; f ist an $x_0 \in E$ stegig:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (x \in E \wedge d(x, x_0) < \delta) \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

($\star$) f ist an x_0 stetig $\Leftrightarrow$ (für alle $U \subset F$ Umgebung von $f(x_0)$, es gibt $V \subset E$ Umgebung von x_0 sodass $f(V) \subset U$.)
($\star$) f ist stetig $\Leftrightarrow$ f ist an jede $x_0 \in E$ stetig.
($\star$) $\mathrm{Id}_E : E \longrightarrow E$ ist stetig; feste Abbildungen sind stetig; Projektion $E \times E' \longrightarrow E$ ist Stetig, Inklusion $i : E \longrightarrow F$ für $E \subset F$ ist stetig;
($\star$) Für $f_i : E_i \longrightarrow F_i$, $i = 1$, 2, stetig, die Kombination $(f_1, f_2) : E_1 \times E_2 \longrightarrow F_1 \times F_2$ ist stetig.
($\star$) $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ stetige Abbildungen $\Rightarrow g \circ f : E \longrightarrow G$ ist stetig.
($\star$) Addition $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ und Multiplikation $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ sind stetig, Inverse $i : \mathbf{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{R}$ ist stetig.
($\star$) ($f : E \longrightarrow F$ stetig, $u = (u_n)$ Folge in E sodass $u_n \longrightarrow x_0 \in E$) $\Rightarrow f(u_n) \longrightarrow f(x_0)$.
($\star$) (f ist an $x_0 \in E$ stetig) $\Leftrightarrow$ (für jede Folge (u_n) in E sodass $u_n \to x_0$, konvergiert $f(u_n)$ gegen $f(x_0)$).

Date: July 28, 2014, 9:45.

Grenzwert einer Funktion

($\star$) $E \subset \mathbf{R}^k$, $f : E \longrightarrow F \subset \mathbf{R}^m$, $x_0 \in \mathbf{R}^k$, $a \in \mathbf{R}^m$; dann ist

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = a$$

genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 (x \in E \wedge d(x, x_0) < \delta) \Rightarrow d(f(x), a) < \varepsilon.$$

($\star$) Falls $x_0 \in E$, (f ist an x_0 stetig) $\Leftrightarrow$ ($\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$).

($\star$) Falls $x_0 \notin E$, ($\lim_{x \to x_0} f(x) = a$) $\Leftrightarrow$ (die Abbildung

$$\tilde{f} \begin{cases} E \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbf{R}^m & \\ x \mapsto f(x) & \text{falls } x \neq x_0 \\ x_0 \mapsto a & \end{cases}$$

is an x_0 stetig).

($\star$) $E \subset \mathbf{R}$ nicht von oberen beschränkt (z.B. $E = \mathbf{R}$ oder $[0, +\infty[$ oder $\mathbf{N}$), $f : E \longrightarrow \mathbf{R}^m$, $a \in \mathbf{R}^m$; man sagt

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} f(x) = a$$

genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, (x \in E \wedge x > N) \Rightarrow d(f(x), a) < \varepsilon.$$

($\star$) $E \subset \mathbf{R}$ nicht von oberen beschränkt (z.B. $E = \mathbf{R}$ oder $[0, +\infty[$ oder $\mathbf{N}$), $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$; man sagt

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in E}} f(x) = +\infty$$

genau dann wenn

$$\forall M > 0, \exists N > 0, (x \in E \wedge x > N) \Rightarrow f(x) > M.$$

Gleichmässige Konvergenz

($\star$) $E \subset \mathbf{R}^k$, $f_n : E \longrightarrow \mathbf{R}$ für $n \in \mathbf{N}$; falls $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in E$, konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ gleichmässig gegen f genau dann wenn

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in E,\ d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

($\star$) **Satz.** Falls (f_n) konvergiert gegen f gleichmässig und f_n ist stetig für jede $n \in \mathbf{N}$, dann ist f stetig.

Globale Konsequenzen der Stetigkeit

($\star$) **Satz.** $E \subset \mathbf{R}^k$ nicht leer, beschränkt, abgeschlossen, $f : E \longrightarrow \mathbf{C}$ stetig; dann ist f beschränkt, und es gibt x_0, x_1 in E sodass

$$f(x_0) = \max \underline{f}(E), \qquad f(x_1) = \min \underline{f}(E).$$

($\star$) **Satz.** $I = [a, b]$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig. Dann ist $\underline{f}([a, b]) = [\min_{x \in [a,b]} f(x), \max_{x \in [a,b]} f(x)]$; insbesondere, falls $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, hat die Gleichung $f(x) = 0$ mindestens eine Lösung $x \in]a, b[$.

($\star$) **Satz.** $I \subset \mathbf{R}$ Intervall, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ stetig. Das Bild von f ist ein Intervall $J \subset \mathbf{R}$; f ist injektive genau dann, wenn f streng monoton ist. In diesem Fall ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : J \longrightarrow I$ auch stetig.

Exponential, Cosinus und Sinus

($\star$) Die Exponential $\exp : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ is stetig.

($\star$) $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$ und $\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$ sind auf $\mathbf{C}$ stetig.

($\star$) Für jede $z \in \mathbf{C}$, es gilt

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

und die Reihen konvergieren absolut.

($\star$) cos, sin, exp definieren Abbildungen $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, die stetig sind.

($\star$) Für alle $z \in \mathbf{C}$, es gilt $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$.

($\star$) $\exp : \mathbf{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ ist bijektiv und streng wachsend; die Umkehrabbildung is $\log :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$.

($\star$) $\log(1) = 0$, $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

($\star$) Für $a > 0$ und $z \in \mathbf{C}$, ist $a^z = \exp(z \log(a))$ definiert.

($\star$) $a^{z_1+z_2} = a^{z_1} a^{z_2}$, $(a^z)^w = a^{zw}$ falls $z \in \mathbf{R}$, $a^z b^z = (ab)^z$.

($\star$) Es gibt genau eine Zahl $\pi \in]1, 4[$ sodass $\sin(\pi) = 0$.

($\star$) Es gilt

$$\begin{aligned} \cos(0) &= 1, & \sin(0) &= 0 \\ \cos(\pi/2) &= 0, & \sin(\pi/2) &= 1 \\ \cos(\pi) &= -1, & \sin(\pi) &= 0 \\ \cos(3\pi/2) &= 0, & \sin(3\pi/2) &= -1 \\ \cos(2\pi) &= 1, & \sin(2\pi) &= 0, \end{aligned}$$

und $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$, $\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$ für alle $z \in \mathbf{C}$.

ETH Zürich – D-MATH, Rämistrasse 101, CH-8092 Zürich, Switzerland
E-mail address: kowalski@math.ethz.ch