ANALYSIS I – KAPITEL V
WICHTIGE BEGRIFFE

EMMANUEL KOWALSKI

Differenzierbarkeit

($\star$) I unendliches Intervall, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in I$; f ist an x_0 differenzierbar $\Leftrightarrow$ der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert; er ist die Ableitung von f an der Stelle x_0.

($\star$) f ist auf I differenzierbar fals f ist an jede Stelle differenzierbar; die Abbildung $x \mapsto f'(x)$ ist die Ableitung von f.

($\star$) Falls f an x_0 differenzierbar ist, dann ist f an x_0 stetig.

($\star$) Die Gerade in der Ebene mit Gleichung

$$y - f(x) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ist die Tangente vom Graph G_f von f an der Stelle $(x_0, f(x_0))$.

($\star$) Falls f ung g auf I definiert sind und an x_0 differenzierbar, dann sind $f + g$, fg an x_0 differenzierbar und

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0), \qquad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0) \quad [Leibnizsche Formel]$$

($\star$) Falls $g(x_0) \neq 0$, dann is $g(x)$ in einer Umbegung J von x_0 nicht null, und f/g is auf J definiert, und an der Stelle x_0 differenzierbar mit

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

($\star$) [Kettenregel] $f : I \longrightarrow J$, und $g : J \longrightarrow \mathbf{R}$ wo I, J unendliche Intervalle sind; $x_0 \in I$, $y_0 = f(x_0)$; falls f ist an x_0 differenzierbar, g ist an y_0 differenzierbar, dann ist $g \circ f$ an x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0)).$$

($\star$) Es sei $R > 0$ und (a_n) eine reelle Folge sodass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

konvergiert absolut für $x \in]-R, R[$. Dann ist f auf $]-R, R[$ differenzierbar und

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

($\star$) Die Abbildungen exp, cos und sin sind auf $\mathbf{R}$ differenzierbar und

$$\exp' = \exp, \quad \cos' = -\sin, \quad \sin' = \cos.$$

Date: August 6, 2014, 14:54.

($\star$) $f : I \longrightarrow J$ bijektive Abbildung, f differenzierbar, und $f'(x) \neq 0$ für $x \in I$; danns ist f^{-1} auf J differenzierbar und

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

für $y \in J$.
($\star$) log ist auf $]0, +\infty[$ differenzierbar und $(\log')(x) = \frac{1}{x}$.
($\star$) [Extremumsatz] $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar, wo $a < b$. Falls $x_0 \in]a, b[$ ein lokal Maximum oder Minimum von f ist, danns ist $f'(x_0) = 0$. Die Umkehrung gilt nicht.
($\star$) [Mittelwertsatz] $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar, wo $a < b$. Es gibt $c \in]a, b[$ sodass

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

($\star$) $I \subset \mathbf{R}$ unendliches Interval, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ differenzierbar; f is fest $\Leftrightarrow f' = 0$ auf I; f ist wachsend $\Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0$ für $x \in I$; f ist fallend $\Leftrightarrow f'(x) \leqslant 0$ für $x \in I$.
($\star$) Falls $f'(x) > 0$ auf I, dans ist f streng wachsend, aber nicht umgekehrt.
($\star$) cos ist auf $[0, \pi]$ streng fallend, $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv, und arccos ist die Umkehrabbildung; sin ist auf $[-\pi/2, \pi/2]$ streng wachsend, $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv, und arcsin ist die Umkehrabbildung.
($\star$) Auf $] - 1, 1[$ ist

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

($\star$) $m \geqslant 0$; I Intervall; $C^m(I)$ ist den Raum von $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ sodass f ist m-mal differenzierbar mit stetige Ableitungen; $f \in C^\infty(I) \Leftrightarrow f \in C^m(I)$ für alle $m \geqslant 0$.
($\star$) $f \in C^m(I)$; $x_0 \in I$; $0 \leqslant k \leqslant m$; das Taylor-Polynom von f an x_0 mit Grad höchstens k ist

$$P_k(f; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k;$$

es ist das einziges Polynom P mit Grad höchstens k sodass

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0), \quad \cdots, \quad P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0).$$

($\star$) [Taylor Formel] $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$, $k \geqslant 1$ sodass f ist $(k-1)$-mal differenzierbar auf $[a, b]$ mit $f^{(i)}$ stetig auf $[a, b]$ für $0 \leqslant i < k-1$, und $f^{(k-1)}$ differenzierbar auf $]a, b[$. Es gibt $c \in]a, b[$ sodass

$$\begin{aligned} f(b) &= P_{k-1}(f; a) + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(b - a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(b - a)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(b - a)^k. \end{aligned}$$

($\star$) I Interval, $x_0 \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$; $\delta > 0$ s.d. $J =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$; $m \geqslant 1$ s.d. $f \in C^{m+1}(J)$; es sei k sodass $2 \leqslant k \leqslant m$ und

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(k)}(x_0) \neq 0;$$

- Falls k eine ungerade Zahl ist, ist x_0 nicht ein lokal Extremum von f;
- Falls k eine gerade Zahl ist, ist x_0 ein lokal Extremum; sie ist ein lokal Minimum $\Leftrightarrow$ $f^{(k)}(x_0) > 0$.

($\star$) V Vektorraum über $\mathbf{R}$; Eine Teilmenge $C \subset V$ ist *konvex* $\iff \forall x \in C,\ \forall y \in C$, die Strecke $[x;y]$ zwischen x und y in V ist en C enthaltet, $\iff \forall x \in C,\ \forall y \in C, \forall t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in C$.
($\star$) $I \subset \mathbf{R}$ Intervall; $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ ist *eine konvexe Abbildung* $\iff$ die Menge

$$C = \{(x,y) \in I \times \mathbf{R} \mid y \geqslant f(x)\} \subset \mathbf{R}^2$$

ist konvex, $\iff$

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I, \forall t \in [0,1],\ f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

($\star$) f ist *streng konvex* $\iff$ die

$$\forall x \in I,\ \forall y \in I, y \neq x, \forall t \in]0,1[,\ f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y).$$

($\star$) f ist *konkav* (bzw. *streng konkav*) $\iff -f$ ist konvex (bzw. streng konvex).
($\star$) f konvex; $n \geqslant 1$; $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$; $(t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n$ sodass

$$t_1 + \cdots + t_n = 1.$$

Dann ist

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n).$$

($\star$) $I \subset \mathbf{R}$ Intervall, $f \in C^2(I)$; f ist konvex $\iff$

$$\forall x \in I,\ f''(x) \geqslant 0.$$

ETH Zürich – D-MATH, Rämistrasse 101, CH-8092 Zürich, Switzerland
E-mail address: kowalski@math.ethz.ch