Musterlösung Serie 1

1. In den Wahrheitstafeln bezeiche $\surd$ den positiven und $\times$ den negativen Wahrheitswert.

   (a) $(A \to B) \leftrightarrow (B \vee (\neg A))$:

A	B	$A \to B$	$\neg A$	$B \vee (\neg A)$	$(A \to B) \leftrightarrow (B \vee (\neg A))$
$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\surd$	$\surd$
$\surd$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\surd$
$\times$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$\times$	$\times$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$

   In der letzten Spalte steht nur der positive Wahrheitswert. Die Aussage ist somit wahr.

   (b) $((A \to B) \wedge B) \to A$.

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \wedge B$	$((A \to B) \wedge B) \to A$
$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
$\surd$	$\times$	$\times$	$\times$	$\surd$
$\times$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$
$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\surd$

   In der letzten Spalte kommt der negative Wahrheitswert vor. Die Aussage ist somit falsch.

2. Diese Aufgabe löst man ganz analog zu der ersten Aufgabe dadurch, dass man Wahrheitstafeln aufstellt.

3. Sei $x \in X$. Es gilt zum einen

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Leftrightarrow \neg(x \in (A \cap B)) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \\ &\Leftrightarrow (\neg(x \in A)) \vee (\neg(x \in B)) \\ &\Leftrightarrow (x \in A^c) \vee (x \in B^c) \\ &\Leftrightarrow x \in (A^c \cup B^c). \end{aligned}$$

   Zum anderen gilt

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow \neg(x \in (A \cup B)) \\ &\Leftrightarrow \neg((x \in A) \vee (x \in B)) \\ &\Leftrightarrow (\neg(x \in A)) \wedge (\neg(x \in B)) \\ &\Leftrightarrow (x \in A^c) \wedge (x \in B^c) \\ &\Leftrightarrow x \in (A^c \cap B^c). \end{aligned}$$

4. Wir verwenden jeweils vollständige Induktion. Die Verankerungen für $n = 1$ sind jeweils durch einsetzen zu verifizieren. Die Induktionsschritte führen wird explizit aus:

(a) Gelte die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&= \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 \\
&= \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1,
\end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die Induktionsannahme verwendet wurde. Aus $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}3n + 1$, folgt nun die Behauptung.

(b) Gelte die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} i + (n+1)\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 + 2(n+1)\sum_{i=1}^{n} i + (n+1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 + 2(n+1)\sum_{i=1}^{n} i + (n+1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 + 2(n+1)\frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} i^3.
\end{aligned}$$

In der dritten Zeile wurde die Induktionsannahme verwendet. In der vierten Zeile wurde Aufgabenteil (a) verwendet. Den Schritt zu Zeile fünf verifiziert man durch Ausmultiplizieren. Damit ist alles gezeigt.

5. Bezeichne

$$\begin{aligned}
\chi : \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \{0,1\}^X \\
A &\mapsto \chi_A
\end{aligned}$$

die Abbildung aus der Aufgabenstellung. Betrachte

$$\begin{aligned}
\psi : \{0,1\}^X &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\
f &\mapsto f^{-1}(1),
\end{aligned}$$

welche jedem $f : X \longrightarrow \{0,1\}$ das Urbild $\{x \in X : f(x) = 1\}$ von 1 zuordnet. Man verifiziert nun, dass ψ eine Inverse zu χ ist, also dass $\psi \circ \chi$ die Identität auf $\mathcal{P}(X)$ ist, und dass $\chi \circ \psi$ die Identität auf $\{0,1\}^X$ ist. Damit ist χ bijektiv.