MATH, PHYS, CHAB — Analysis I — HS 2013

Prof. Dr. E. Kowalski

Musterlösung Serie 2

1. (a) f ist injektiv. Seien $x, x' \in X$ verschieden. Nehme an, dass $f(x) = f(x')$. Dann folgt auch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x').$$

Da $g \circ f$ injektiv ist, folgt $x = x'$, im Widerspruch zur Annamne, dass die beiden Elemente verschieden sind. Also gilt $f(x) \neq f(x')$.

(b) f ist im Allgemeinen nicht surjektiv. Gegenbeispiel: Sei $X = \{x\}, Y = \{x, x'\}$, mit $x \neq x'$, und $Z = X$. Setze $f(x) = x$ und $g(x) = g(x') = x$. Dann ist $g \circ f$ die Identität auf X und somit bijektiv. Die Funktion f ist nun allerdings nicht surjektiv, da x' nicht im Bild von f liegt.

(c) g ist im Allgemeinen nicht injektiv. Als Gegenbeispiel nehme man dasjenige aus Aufgabenteil (b). Dort ist g nicht injektiv, da x und x' beide auf x abgebildet werden.

(d) g ist surjektiv: Da $g \circ f$ surjektiv ist, gilt $Z = \underline{(g \circ f)}(X)$. Aber

$$Z = \underline{(g \circ f)}(X) = \underline{g}(\underline{f}(X)) \subset \underline{g}(Y) \subset Z.$$

Also $\underline{g}(Y) = Z$, und g ist surjektiv.

2. (a) Beh.: $\underline{f}^{-1}(A \cup B) \subset \underline{f}^{-1}(A) \cup \underline{f}^{-1}(B)$

Bew.: $x \in \underline{f}^{-1}(A \cup B) \Rightarrow f(x) \in A \cup B \Rightarrow (f(x) \in A) \vee (f(x) \in B) \Rightarrow (x \in \underline{f}^{-1}(A)) \vee (x \in \underline{f}^{-1}(B)) \Rightarrow x \in \underline{f}^{-1}(A) \cup \underline{f}^{-1}(B))_\square$

Beh.: $\underline{f}^{-1}(A) \cup \underline{f}^{-1}(B) \subset \underline{f}^{-1}(A \cup B)$

Bew.: $x \in \underline{f}^{-1}(A) \cup \underline{f}^{-1}(B)) \Rightarrow (x \in \underline{f}^{-1}(A)) \vee (x \in \underline{f}^{-1}(B)) \Rightarrow (f(x) \in A) \vee (f(x) \in B) \Rightarrow f(x) \in A \cup B \Rightarrow x \in \underline{f}^{-1}(A \cup B)_\square$

Beh.: $\underline{f}^{-1}(A \cap B) \subset \underline{f}^{-1}(A) \cap \underline{f}^{-1}(B)$

Bew.: $x \in \underline{f}^{-1}(A \cap B) \Rightarrow f(x) \in A \cap B \Rightarrow (f(x) \in A) \wedge (f(x) \in B) \Rightarrow (x \in \underline{f}^{-1}(A)) \wedge (x \in \underline{f}^{-1}(B)) \Rightarrow x \in \underline{f}^{-1}(A) \cap \underline{f}^{-1}(B))_\square$

Beh.: $\underline{f}^{-1}(A) \cap \underline{f}^{-1}(B) \subset \underline{f}^{-1}(A \cap B)$

Bew.: $x \in \underline{f}^{-1}(A) \cap \underline{f}^{-1}(B)) \Rightarrow (x \in \underline{f}^{-1}(A)) \wedge (x \in \underline{f}^{-1}(B)) \Rightarrow (f(x) \in A) \wedge (f(x) \in B) \Rightarrow f(x) \in A \cap B \Rightarrow x \in \underline{f}^{-1}(A \cap B)_\square$

(b) Beh.: $\underline{f}(X \cap Y) \subset \underline{f}(X) \cap \underline{f}(Y)$

Bew.: $y \in \underline{f}(X \cap Y) \Rightarrow \exists x \in X \cap Y : f(x) = y \Rightarrow (x \in X) \wedge (x \in Y) \Rightarrow (y \in \underline{f}(X)) \wedge (y \in \underline{f}(Y)) \Rightarrow y \in \underline{f}(X) \cap \underline{f}(Y)_\square$

Beh.: $\underline{f}(X \cup Y) \subset \underline{f}(X) \cup \underline{f}(Y)$

Bew.: $y \in \underline{f}(X \cup Y) \Rightarrow \exists x \in X \cup Y : f(x) = y \Rightarrow (x \in X) \vee (x \in Y) \Rightarrow (y \in \underline{f}(X)) \vee (y \in \underline{f}(Y)) \Rightarrow y \in \underline{f}(X) \cup \underline{f}(Y)_\square$

Beh.: $\underline{f}(X) \cup \underline{f}(Y) \subset \underline{f}(X \cup Y)$

Bew.: $y \in \underline{f}(X) \cup \underline{f}(Y) \Rightarrow (y \in \underline{f}(X)) \vee (y \in \underline{f}(Y)) \Rightarrow (\exists x_1 \in X : f(x_1) = y) \vee (\exists x_2 \in Y : f(x_2) = y) \Rightarrow \exists x \in X \cup Y : f(x) = y \Rightarrow y \in \underline{f}(X \cup Y)_\square$

(c) z.B.: $f(x) = x^2, M = N = \mathbb{R}, A_1 = [-1, 0], A_2 = [0, 1], \underline{f}(A_1 \cap A_2) = \underline{f}(\{0\}) = \{0\}, \underline{f}(A_1) \cap \underline{f}(A_2) = [0, 1]$

3. (a) Es gilt für $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4$, wie man durch quadratisches Ergänzen findet. Man sieht nun $f(-1) = f(0)$, also ist f nicht injektiv. Ferner gilt $f(\mathbb{R}) = [3/4, \infty[$, also ist f nicht surjektiv.

   (b) Es gilt $\sin 0 = 0 = \sin \pi$, also ist g nicht injektiv. Ferner gilt $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, also ist g nicht surjektiv.

   (c) Es gilt $\sin 0 = 0 = \sin \pi$, also ist h nicht injektiv. Ferner gilt $\sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$, also ist h surjektiv.

4. Zunächst das logische Prädikat: Für $c \subset \mathbb{R}^2$ setze

$$\begin{aligned} A(c) :\leftrightarrow\ & \exists \rho \geqslant 0\ \exists x_0 \in \mathbb{R}\ \exists y_0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \\ & ((x, y) \in c \leftrightarrow ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2)). \end{aligned}$$

Nun die anderen Fragen:

   (a) Wenn man einen gegebenen Kreis verschiebt, ändert sich zwar der Kreis, aber weder sein Radius, sein Umfang noch seine Fläche. Also ist keine der Funktionen injektiv.

   (b) Da Radius, Umfang und Fläche nicht negativ sein können, ist keine der Funktionen surjektiv.

   (c) Es gilt $r(K) = u(K) = a(K) = [0, \infty[$. Diese grössen können nicht negativ sein. Zum anderen gibt es zu gegebem Radius (bzw. Umfang, bzw. Flächeninhalt) einen Kreis mit der entprechenden Eingenschaft:

   - Sei $\rho \geqslant 0$. Es gilt $r(\{(x, y) : x^2 + y^2 = \rho^2\}) = \rho$.
   - Sei $\nu \geqslant 0$. Es gilt $u(\{(x, y) : x^2 + y^2 = (\frac{\nu}{2\pi})^2\}) = \nu$.
   - Sei $\alpha \geqslant 0$. Es gilt $a(\{(x, y) : x^2 + y^2 = \frac{\alpha}{\pi}\}) = \alpha$.

5. (a)
   - Surjektivität: Sei $x \in X$. Dann ist $(x, f(x))$ ein Element von G_f das unter p auf x abgebildet wird.
   - Injektivität: Seien (x, y) und (x', y') zwei Elemente von G_f mit $p(x, y) = p(x', y')$. Es folgt $x = x'$ und damit auch $y = f(x) = f(x') = y'$.

   (b) Sei $x \in X$. Dann gibt es wegen der Bijektivität von p ein $y \in Y$, sodass $(x, y) \in G$ und $p(x, y) = x$. Setze $f(x) = y$. Dies definiert eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$. Bezeichne $G_f \subset X \times Y$ den Graphen von f. Es gilt $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (f(x) = y \wedge (x, f(x)) \in G)$. Also ist G der Graph von f.