Musterlösung Serie 3

1. Eine Möglichkeit wäre

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in \mathbb{N}_0 \\ x, & x \notin \mathbb{N}_0 \,. \end{cases} \end{aligned}$$

2. (a) Wir verifizieren die Axiome:
   - Reflexivität: $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$.
   - Symmetrie: $x - y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow y - x = (-1)(x-y) \in \mathbb{Z}$.
   - Transitivität: Gelte $x \sim y$ und $y \sim z$. Damit existieren $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $x - y = m$, $y - z = n$. Es folgt, dass $x - z = x - y + y - z = m - n \in \mathbb{Z}$, also $x \sim z$.

   (b) Sei $r \in \mathbb{R}$. Bezeichne $\lfloor r \rfloor$ die grösste ganze Zahl, die kleiner oder gleich r ist (abrunden). Es gilt

   $$r = \lfloor r \rfloor + (r - \lfloor r \rfloor) \sim r - \lfloor r \rfloor \in [0,1[.$$

   Damit ist gezeigt, dass es zu jeder rellen Zahl r eine Zahl $r - \lfloor r \rfloor \in [0,1[$ gibt, die zu r äquivalent ist. Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien also $a, b \in [0,1[$ mit $r \sim a$ und $r \sim b$. Es folgt $a \sim b$, also $a - b \in \mathbb{Z}$. Da aber aus $a, b \in [0,1[$ auch $a - b \in]-1,1[$ folgt, erhalten wir $a - b \in \mathbb{Z} \cap\,]-1,1[= \{0\}$. Also $a = b$.

3. (a) Wir verifizieren die Axiome einer Ornungsrelation:
   - Reflexivität: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n = 1n$.
   - Antisymmetrie: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \mid m$ und $m \mid n$. Also gibt es $l, l' \in \mathbb{N}$ mit $n = lm$, $m = l'n$. Wir schliessen

     $$\begin{aligned} &\Rightarrow n = ll'n \\ &\Rightarrow (1 - ll')n = 0 \\ &\Rightarrow 1 - ll' = 0 \\ &\Rightarrow ll' = 1 \\ &\Rightarrow l = l' = 1. \end{aligned}$$

     Hier haben wir $n \neq 0$ und und $l, l' \in \mathbb{N}$ verwendet. Es folgt $m = n$.
   - Transitivität: Seien $m, n, p \in \mathbb{N}$ mit $n \mid m$ und $m \mid p$. Also gibt es $l, l' \in \mathbb{N}$ mit $m = ln, p = l'm$. Es folgt $p = ll'n$, also $n \mid p$.

   (b)
   - Es gibt keine obere Schranke. Annahme: $k \in \mathbb{N}$ ist obere Schranke. Dann gilt $\forall\ p \in \mathbb{N} : 5p \mid k$. Also auch für $p = k$: $5k|k$. Das bedeutet $5|1$, ein Widerspruch.
   - Ja, 1 ist eine untere Schranke: Für alle $p \in \mathbb{N}$ gilt $1|5p$.
   - Ja, $5 \in 5\,\mathbb{N}$ ist das Minimum, da 5 jedes vielfache von 5 teilt.

(c) Es gilt weder $5 \mid 3$, noch $3 \mid 5$.

(d) Betrachte z.B. die Menge $T = \{2^p : p \in \mathbb{N}\}$. Für zwei Elemente von T teilt das kleinere von beiden das grössere.

4. (a) Man zieht zunächst auf $(2, 3)$ und von dort auf $(3, 1)$.

   (b) Wir verifizieren die drei Axiome.

   - Reflexivität: Man zieht gar nicht.
   - Symmetrie: Man zieht den Springer in umgekehrter Reihenfolge mit umgekehrten Schritten.
   - Transitivität: Man führt zwei gegebene Zugfolgen nacheinander aus.

   (c) Es gibt nur eine Äquivalenzklasse, nämlich das ganze Schachbrett. Man kann jeden Punkt auf dem Schachbrett erreichen, egal wo man startet.

   Zunächst betrachtet man den Fall, in dem der Springer vom Rand des Schachbretts den Abstand $\geqslant 2$ hat und überzeugt sich, dass jedes Feld, das vom Rand den Abstand $\geqslant 2$ hat (nennen wir sie mittlere Felder), erreicht werden kann. Nun überlegt man sich, dass jedes Feld, dass vom Rand den Abstand $\leqslant 1$ hat, von einem geschickt gewählten mittleren Feld erreicht werden kann. Also kann jedes Feld erreicht werden.

   Da es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, ist die Annahme, dass der Springer auf einem mittleren Feld startet, gestattet.

5. "$\Rightarrow$" Seien I, Z Mengen mit $Z \neq \emptyset$. Sei $f : I \longrightarrow \mathcal{P}(Z) \setminus \{\emptyset\}$ gegeben. Wende das Auswahlaxiom auf Z an, um ein $h_0 : \mathcal{P}(Z) \longrightarrow Z$ zu erhalten. Definiere

$$\begin{aligned} h : \mathcal{P}(Z) \setminus \{\emptyset\} &\longrightarrow Z \\ B &\longmapsto h_0(B). \end{aligned}$$

   Setze $g = h \circ f : I \longrightarrow Z$. Es gilt nach dem Auswahlaxiom für $x \in I$: $g(x) = h(f(x)) = h_0(f(x)) \in f(x)$, da $f(x) \neq \emptyset$.

   "$\Leftarrow$" Sei X eine nichtleere Menge. Sei $g : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ die Identität. Laut Voraussetzung gibt es ein $f_0 : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow X$, sodass $\forall\, A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} : f_0(A) \in g(A) = A$. Erweitere dieses g_0 zu einem

$$f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow X,$$

   indem man der leeren Menge ein beliebiges Element in X zuordnet. Für $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ gilt nun $f(A) = f_0(A) \in g(A) = A$.

6. Neben den Körperaxiomen benötigen wir die Konsistenzaxiome:

   Ki) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \forall z \in \mathbb{R}$

   Kii) $x \leq y, 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$

   Wir zeigen einige Behauptungen.

(a) $x > y, z > 0 \Rightarrow xz > yz$:
Folgt aus Kii), da $xz = yz \Rightarrow x = y$.

(b) $x \cdot 0 = 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$:
$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$.

(c) $x > 0 \Rightarrow -x < 0$:
$-x \leqslant 0$ folgt aus Konsistenz Ki) durch Addition von $-x$. Der Fall $-x = 0$ ist wegen $x \neq 0$ ausgeschlossen.

(d) $x > 0, y < 0 \Rightarrow xy < 0$:
Aus Beh. (a) und Beh. (c) folgt $x(-y) > 0(-y)$, also $-xy > 0$ mit (b). Mit (c) folgt nun die Aussage.

(e) $x^2 > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$:
$x > 0 : x^2 = x \cdot x > 0$ aus Beh. (a) und (b). $x < 0 : -x > 0$ nach Beh. (c) und somit $(-x)(-x) > 0$ aus Beh. (a) und (b).

(f) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$:
Beh. (e) impliziert $1 > 0$. Wäre $\frac{1}{x} < 0$, dann ergibt sich der Widerspruch $1 = x \cdot \frac{1}{x} < 0$ aus Beh. (d) zu $1 > 0$. Für $\frac{1}{x} = 0$ ergibt sich analog ein Widerspruch: $1 = x\frac{1}{x} = 0$.

(g) $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$:
$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \underbrace{(b-a)}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{1}{b}}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{1}{a}}_{>0} > 0$ aus Beh. (f) und Beh.(a) und (b).

(h) $0 < a < b \Rightarrow \frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$:
$0 < a < b \Rightarrow 1 < 1 + a < 1 + b \Rightarrow \frac{1}{1+b} < \frac{1}{1+a}$ aus Beh.(g). Mittels Beh. (c) folgt $\frac{-1}{1+a} < \frac{-1}{1+b}$ und damit$1 + \frac{-1}{1+a} < 1 + \frac{-1}{1+b}$. Formen Sie nun beide Terme um.

7. (a) Es gilt $(a-b)^2 \geqslant 0$, also $a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$. Addieren Sie nun $2ab$ auf beiden Seiten.

(b) Es gilt mit (a): $ab = 2 \cdot \sqrt{\epsilon} a \cdot \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} b \leqslant \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$.