Musterlösung Serie 4

1. (a) Die Reflexivität ist klar.
Nun zur Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ mit $x \leqslant y$ und $y \leqslant z$. Falls $x = y$ oder $y = z$ folgt direkt $x \leqslant z$. Sei also $x \neq y$ und $y \neq z$. Damit existieren $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_k = y_k,\ k \in \{1, \dots, i-1\}, x_i < y_i$, $y_k = z_k,\ k \in \{1, \dots, j-1\}$ und $y_j < z_j$. Mit $l := \min\{i, j\}$ folgt für $k \leqslant l$, dass $x_k = y_k = z_k$ und $x_l \leqslant y_l \leqslant z_l$ wobei eine der Ungleichheiten strikt ist.
Schliesslich die Antisymmetrie: Seien $x, y \in R^n$ mit $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ und $x \neq y$. Wir führen diese Situation zu einem Widerspruch. Wir wissen, dass $\exists i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $y_j < x_j, y_k = x_k,\ k \in \{1, \dots, j-1\}, y_i > x_i$ und $y_k = x_k,\ k \in \{1, \dots, i-1\}$. Aus $i = j$ folgt $x_i < y_i = y_j < x_j = x_i$. Widerspruch. Aus $i < j$ folgt $y_i = x_i < y_i$. Widerspruch. $j < i$ führt analog zu einem Widerspruch.

   (b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Falls $x = y$ ist nichts zu zeigen. Sei $x \neq y$. Setze $m = \max\{i \in \{1, \dots, n\} : \forall k \leqslant i : x_k = y_k\}$. Es gilt $m \neq n$ und $x_{m+1} \neq y_{m+1}$. OBdA gelte $x_{m+1} < y_{m+1}$. Es folgt $x \leqslant y$.

2. (a) Gelte $P(n)$. Dann gilt $a_{n+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$. Weiterhin

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\ &= \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}. \end{aligned}$$

Die erste Klammer ist gleich $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$, wie man durch ausmultiplizieren verifiziert. Also gilt auch $P(n+1)$.
Es gilt nicht $\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : P(n)$, da z.B. $P(0)$ nicht gilt, wie man durch Einsetzen sieht.

   (b)
   - Verankerung: Für $n \in \{0, 1\}$ stimmt die Formel.
   - Schritt:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}\ 2^{n+2}} \left((1+\sqrt{5})^n \underbrace{(2 + 2\sqrt{5} + 4)}_{=(1+\sqrt{5})^2} - (1-\sqrt{5})^n \underbrace{(2 - 2\sqrt{5} + 4)}_{=(1-\sqrt{5})^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}\ 2^{n+2}} \left((1+\sqrt{5})^{n+2} - (1-\sqrt{5})^{n+2} \right). \end{aligned}$$

3. b ist wohldefiniert, da Y durch 1 nach unten beschränkt und nicht leer ist $(2 \in Y)$. Ferner folgt $b > 0$.

Annahme $b^2 > 2$, also $0 < \frac{2}{b^2} < 1$. Es folgt $a := \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{b^2}) \in]0, \frac{1}{2}[$. Also $s := b(1-a) \in]0, b[$. Wir rechnen $s^2 = b^2(1 - 2a + a^2) \geqslant b^2(1-2a) = 2$. Also $s \in Y$ und $s < b$. Widerspruch.

Annahme $b^2 < 2$, also $a := \frac{1}{2}(1 - \frac{b^2}{2}) \in]0, \frac{1}{2}[$. Es folgt $s := \frac{b}{1-a} > b$ und $s^2 = \frac{b^2}{1-2a+a^2} < \frac{b^2}{1-2a} = 2$. Die Zahl s ist eine untere Schranke für Y. Für $t \in [0, s[$ folgt nämlich $0 \leqslant t^2 \leqslant st < s^2 < 2$, also $t \notin Y$. Nun haben wir $s > b = \inf Y \geqslant s$. Widerspruch.

Es folgt $b^2 = 2$.

4. Seien $a, b \in \mathbb{N}_0$ koprim, $b \neq 0$ und $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Dann ist $a^2 = 2b^2$ gerade. Also ist auch a gerade, $a = 2l$ für ein $l \in \mathbb{N}$, da $a = 0$ ausgeschlossen ist. Es folgt $2b^2 = 4l^2$ also auch $b^2 = 2l^2$ gerade. Damit ist b gerade, im Widerpruch zur Teilerfremdheit von a und b.

5. Wir berechnen nur $P([0,1],[0,2])$. Es ist

$$Q([0,1],[0,2]) = \sup\big\{ \inf\{|x-y| : \ \ y \in [0,1]\} : \ \ x \in [0,2]\big\}.$$

Definiere $M_x = \{|x-y| : \ \ y \in [0,1]\}$. Fallunterscheidung:

- Für $x \in [0,1]$ ist M_x eine Teilmenge der nichtnegativen rellen Zahlen, welche die 0 enthält, also $\inf M_x = 0$.
- Für $x \in (1,2]$ gilt $x - 1 = |x-1| \in M_x$. Ausserdem ist für alle $y \in [0,1] : |x-y| = x - y \geq x - 1 = |x-1|$, also gilt $a \geq |x-1|$ für alle $a \in M_x$. Daher $\inf M_x = |x-1|$.

Es folgt $Q([0,1],[0,2]) = \sup\{\inf M_x : \ \ x \in [0,2]\} = 1$, ähnlich $Q([0,2],[0,1]) = 0$, also $P([0,1],[0,2]) = 1$.
Eine analoge Rechnung gibt $P(\{\frac{1}{2}\},[0,1]) = \frac{1}{2}$.

6. Seien $C := \sup A$ und $D := \sup B$. Für beliebige $a \in A$ und $b \in B$ gilt $a + b \leqslant C + D$. Also $\sup(A+B) \leqslant C + D$.

   Sei nun $\epsilon > 0$. Es existieren nun $a \in A$ und $b \in B$ mit $a > C - \epsilon/2$ und $b > D - \epsilon/2$. Es folgt $a + b \in A + B$ mit $a + b > C + D - \epsilon$. Also $\sup(A+B) = C + D$.

7. (a) Für alle $b \in B$ gilt $b \leqslant \sup B$. Also gilt auch für alle $a \in A$, dass $a \leqslant \sup B$. Also $\sup A \leqslant \sup B$. Die Behauptung für das Infimum folgt analog.

   (b) Sei $b \in B$. Da für alle $a \in A$ gilt, dass $a \leqslant b$, folgt $\sup A \leqslant b$. Da die letze Gleichung für alle $b \in B$ gilt folgt die Behauptung.

8. Es gilt $D(1/2, [1,2]) = 1/2$ und $D(1/2, [0,1]) = 0$.

   (a) Korrekt. Es gilt $\inf\{|x-z|, z \in A\} \geqslant 0$, da der Betrag einer Zahl nie negativ ist. Ferner gilt $\inf\{|x-z|, z \in A\} \leqslant 0$, da $x \in A$ und $|x-x| = 0$.

   (b) Falsch. Gegenbeispiel: $A =]0,1[$ und $x = 1$.

   (c) Korrekt. Wähle $q_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ mit $q_n \longrightarrow x$. Es folgt $0 \leqslant D(x, \mathbb{Q} \cap [0,1]) \leqslant |x - q_n| \longrightarrow 0$.

(d) Korrekt. Für $z \in A$ gilt $|y-z| = |y-x+x-z| \leqslant |y-x| + |x-z|$. Es folgt $\inf_{z\in A} |y-z| \leqslant |y-x| + \inf_{z\in A} |x-z| \leqslant q + D(x,A) \leqslant q+p$.

(e) Falsch. Gegenbeispiel $A = [0,1], x = 0, y = 1, p = q = 0$.