Musterlösung Serie 5

1. (a) Es gilt $|\operatorname{Bild} f| \leqslant |Y| < |X|$. Da $|\operatorname{Bild} f| < |X| \Leftrightarrow \exists\, x, x' \in X, x \neq x', f(x) = f(x')$, folgt die Aussage.

   (b) Sei zunächst f injektiv. Es folgt $|\operatorname{Bild} f| = |X|$. Also $\operatorname{Bild} f \subset Y$ und $|\operatorname{Bild} f| = |Y|$. Es folgt $\operatorname{Bild} f = Y$. Sei nun f nicht injektiv. Es folgt $|\operatorname{Bild} f| < |X| = |Y|$, also $\operatorname{Bild} f \neq Y$.

2. (a) Sei C_a definiert wie auf dem Aufgabenblatt. Sei $b \in \{1, \ldots, 2n\}$. Sei $k := \max\{l \in \mathbb{N}_0 : 2^l | b\}$. Setze $a := b/2^k$. Diese Zahl ist ungerade, da k maximal ist. Es folgt $b \in C_a$. Eindeutigkeit: Seien $a, a' \in \{1, \ldots, 2n\}$ ungerade und $b \in C_a \cap C_{a'}$. Es folgt, dass $\exists\, k, k'$ mit $b = 2^k a$ und $b = 2^{k'} a'$. Gelte oBdA $k \leqslant k'$. Es folgt, $2^{k'-k} a' = a$ ungerade. Also $k' = k$, und damit $a = a'$.

   Wir haben gezeigt: $\forall\, b \in \{1, \ldots, 2n\}\ \exists\,!\, a \in \{1, \ldots, 2n\} : b \in C_a$.

   Sei $\mathcal{A} = \{a \in \{1, \ldots, 2n\},\ a \text{ ungerade}\}$. Sei nun $f : S \longrightarrow \mathcal{A}$ dadurch definiert, dass wir jedem $b \in S$ dasjenige $a = f(b) \in \mathcal{A}$ zuordnen, sodass $b \in C_a$. Es gilt $|\mathcal{A}| = n < |S|$. Nach dem Schubfachprinzip ist f nicht injektiv. Also gibt es $b, b' \in S$ mit $b \neq b'$ und $b, b' \in C_a$, wo $a = f(b) = f(b')$. Es folgt $\min\{b, b'\} | \max\{b, b'\}$.

   (b) Setze $T := \{n+1, \ldots, 2n\}$.

3. "$\Rightarrow$"
   - Fall $I = [a, b], a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ist klar.
   - Fall $I = [a, b[, a, b \in \mathbb{R}, a < b$: Seien $x, y \in I, x \neq y$. OBdA $x < y$. Es folgt $a \leqslant x < y < b$. Also haben wir für alle $z \in [x, y]$, dass $a \leqslant x \leqslant z \leqslant y < b$, d.h. $z \in [a, b[$.
   - Die Fälle $I =]a, b]$ und $I =]a, b[$ werden analog behandelt.

   "$\Leftarrow$" Seien $a = \inf I$ und $b = \sup I$. Da $|I| > 1$ folgt $a \neq b$. Da $I \subset [a, b]$ genügt es $]a, b[\subset I$ zu zeigen. Sei also $z \in]a, b[$. Sei $d := \min\{|b - z|, |a - z|\}$. Sei $\epsilon \in (0, d)$. Aus der Eigenschaft von Suprema und Infima folgt, dass $\exists\, x, y \in I : a + \epsilon > x, b - \epsilon < y$. Also $a \leqslant x < a + \epsilon \leqslant z \leqslant b - \epsilon < y \leqslant b$ und damit $z \in [x, y] \subset I$.

4. (a) Sei $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Bijektion (Serie 3, Aufgabe 1).
   - Fall I_1: Die Funktion $f_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \tan x$ ist bijektiv.
   - Fall I_2: Die Funktion $\phi \circ f_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist bijektiv. Definiere

     $$f_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
     $$x \longmapsto f_2(x) := \begin{cases} \phi \circ f_1(x), & x \in I_1 \\ 0, & x = \pi/2. \end{cases}$$

     Dies ist eine Bijektion.
   - Fall I_3 analog zu Fall I_2.

- Fall I_4: Die Funktion $\phi \circ f_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist bijektiv. Definiere

$$\begin{aligned} f_4 : I_4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_4(x) := \begin{cases} \phi \circ f_2(x), & x \in I_2 \\ 0, & x = -\pi/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Dies ist eine Bijektion.

(b) Sei nun $I =]a, b[, a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Die Funktion

$$\begin{aligned} \xi : I &\longrightarrow] -\pi/2, \pi/2[\\ x &\longmapsto -\frac{\pi}{2} + \pi \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}$$

definiert eine Bijektion. Setze $f = f_1 \circ \xi$. Die anderen Fälle $I =]a, b], I = [a, b[$ und $I = [a, b]$ werden analog auf Aufgabenteil (a) zurückgeführt.

5. (a) Sei $\epsilon > 0$. Es gibt $n_0', n_0'' \in \mathbb{N}$, sodass

$$\begin{aligned} n \geqslant n_0' &\Rightarrow |u_n - u| < \epsilon, \\ n \geqslant n_0'' &\Rightarrow |v_n - v| < \epsilon. \end{aligned}$$

Sei $n_0 := \max\{n_0', n_0''\}$. Es gilt für alle $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (u + v)| &= |(u_n - u) + (v_n - v)| \\ &\leqslant |u_n - u| + |v_n - v| \leqslant \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \end{aligned}$$

(b) Sei $\epsilon > 0$, oBdA $\epsilon < 1$ und n_0 wie oben. Sei $n \geqslant n_0$. Es folgt

$$|v_n| = |v_n - v + v| \leqslant |v| + |v_n - v| \leqslant |v| + \epsilon \leqslant |v| + 1.$$

Also

$$\begin{aligned} |u_n v_n - uv| &= |(u_n - u)v_n + u(v_n - v)| \\ &\leqslant |u_n - u||v_n| + |u||v_n - v| \\ &\leqslant \epsilon(|v| + 1) + |u|\epsilon \\ &\leqslant \epsilon(|v| + 1 + |u|). \end{aligned}$$

6. (a) Sei $r = \max\{|a_k - a|, k \in \mathbb{N}\}$. Diese Zahl ist endlich, da konvergente Folgen beschränkt sind. Sei $\epsilon > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon/2$. Es folgt für alle $n \geqslant \frac{2n_0}{\epsilon} r$, dass

$$\begin{aligned} |a - s_n| &= \frac{1}{n} |\sum_{i=1}^{n} (a - a_i)| \\ &\leqslant \frac{1}{n} |\sum_{i=1}^{n_0} (a - a_i)| + \frac{1}{n} |\sum_{i=n_0}^{n} (a - a_i)| \\ &\leqslant \frac{n_0}{n} r + \frac{1}{n} n\epsilon/2 \leqslant \frac{n_0 \epsilon}{2n_0 r} r + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

(b) Setze $b_n = (-1)^n$.