Musterlösung Serie 6

1. Induktionsbeweis für $m_k \geqslant k$.

   - Anker: $m_1 \geqslant 1$, da $m_k \in \mathbb{N}$.
   - Schritt: $m_{k+1} > m_k \geqslant k$, also $m_{k+1} \geqslant k+1$.

   Sei $\epsilon > 0$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 : |u - u_n| < \epsilon$. Für $k \geqslant n_0$ gilt $m_k \geqslant k \geqslant n_0$ und also $|u - v_k| = |u - u_{m_k}| < \epsilon$.

2. (a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} \\
&= (1+\frac{1}{n-1})\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \\
&= \frac{n}{n-1}\left(\frac{\frac{1+n}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \\
&= \frac{n}{n-1}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \\
&= \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \\
&\geqslant \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1.
\end{aligned}
$$

   Hier haben wir die Bernoulli Ungleichung verwendet, was gestattet ist, da $-\frac{1}{n^2} \geqslant -1$.

   (b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \\
&= \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \\
&\geqslant \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(1+\underbrace{\frac{n}{n^2-1}}_{\geqslant \frac{1}{n}}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{1+\frac{1}{n}}(1+\frac{1}{n}) = 1.
\end{aligned}
$$

Hier haben wir in der ersten Ungleichung wieder Bernoulli verwendet. Also ist b_n monoton fallend und damit nach oben beschränkt. Es folgt

$$\sup a_n \leqslant \sup b_n < \infty.$$

Also ist a_n beschränkt und monoton wachsend und somit konvergent.

3. (a) Klar.

   (b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k) &= \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}b_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}b_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}b_{k+1} + a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}b_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 - \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}b_k \\
&= a_{n+1}b_{n+1} - a_1b_1 - \sum_{k=1}^{n} b_k(a_{k+1}-a_k).
\end{aligned}$$

4. Verwende z.B. die Identitäten ($k \in \mathbb{N}_0$)

$$\sum_{j=0}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}, \qquad \sum_{j=0}^{k} j^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Für $0 \leq m \leq k$ ist

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{k} |m-n| &= \sum_{n=0}^{m}(m-n) + \sum_{n=m}^{k}(n-m) \\
&= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{k^2+k+m^2-m-2km}{2} \\
&= \frac{k^2+k-2km+2m^2}{2}.
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{k} |m-n| = \sum_{m=0}^{k} \frac{k^2+k-2km+2m^2}{2} = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

5. (a) Es gilt $r_{n+1}-r_n = u_{2n+2}-u_{2n+3} \geqslant 0$, also ist r_n monoton wachsend. Ferner ist

$$\begin{aligned}
r_n = s_{2n+1} &= \underbrace{-u_1+u_2}_{\leqslant 0}\underbrace{-u_3+u_4}_{\leqslant 0}\underbrace{-u_5+u_6}_{\leqslant 0}+\ldots\underbrace{-u_{2n-1}+u_{2n}}_{\leqslant 0}-u_{2n+1} \\
&\leqslant -u_{2n+1} \leqslant 0,
\end{aligned}$$

also existiert $L := \lim_{n\to\infty} r_n$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} q_n &= s_{2n+1} - (s_{2n+1} - s_{2n}) \\ &= r_n - (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \\ &= \underbrace{r_n}_{\longrightarrow L} + \underbrace{u_{2n+1}}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow L. \end{aligned}$$

Also konvergiert s_n gegen L.

(b) Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

(c) Die Folge $u_k := \frac{1}{n}$ ist nichtnegativ, monoton fallend und konvergiert gegen Null.

(d) Setze

$$\phi(n) = \begin{cases} 2k-1, & n = 3k-2, k \in \mathbb{N}, \\ 4k-2, & n = 3k-1, k \in \mathbb{N}, \\ 4k, & n = 3k, k \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\phi(n)} \frac{1}{\phi(n)} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\phi(n)} \frac{1}{\phi(n)} &= (-1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} + (-\frac{1}{3} + \frac{1}{6}) + \frac{1}{8} + (-\frac{1}{5} + \frac{1}{10}) + \frac{1}{12} + \dots \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \dots \\ &= \frac{1}{2}(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots). \end{aligned}$$

6. (a) Verwende z.B. 4 *b*) mit $a_k = k$ und $b_k = H_k$.

(b) Mit Teilaufgabe a) folgt: $\frac{H_1 + H_2 + \ldots + H_n}{nH_n} = \frac{n+1}{n} - \frac{1}{H_n}$.

(c) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sei $f(m,n) = H_{mn} - H_m - H_n$. Es ist $f(1,n) = -1$.
Erster Schritt: Wir möchten zeigen, dass $0 \le f(m+1,n) - f(m,n) \le \frac{1}{m(m+1)}$.

$$\begin{aligned} f(m+1,n) - f(m,n) &= H_{(m+1)n} - H_{mn} - \frac{1}{m+1} \\ &= -\frac{1}{m+1} + \sum_{k=mn+1}^{(m+1)n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Wenn wir verwenden, dass in der Summe gilt: $mn+1 \le k \le (m+1)n$, und dass die Summe n Terme hat, dann erhalten wir

$$-\frac{1}{m+1} + \frac{n}{(m+1)n} \le f(m+1,n) - f(m,n) \le -\frac{1}{m+1} + \frac{n}{mn+1}$$

also $0 \le f(m+1,n) - f(m,n) \le \frac{1}{m(m+1)}$.
Zweiter Schritt: Aus

$$f(m+1,n) - f(1,n) = \sum_{k=1}^{m} \big(f(k+1,n) - f(k,n) \big)$$

folgt

$$0 \leq f(m+1,n)+1 \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{m+1} \leq 1.$$

(d) Wenn wir zeigen, dass die Folge

$$b_n = \frac{H_{n!} - H_1 - H_2 - \ldots - H_n}{nH_n}$$

gegen 0 konvergiert, dann folgt die Behauptung aus Teilaufgabe b). Es ist (wieso?):

$$b_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1, k!)}{nH_n}.$$

Aus Teilaufgabe c) folgt

$$-\frac{n-1}{nH_n} \leq b_n \leq 0.$$