Musterlösung Serie 7

1. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{N+1}\longrightarrow 1 \quad (N\longrightarrow\infty).$$

Ferner gilt

$$(1-q)\sum_{n=0}^{N}q^n=1-q^{N+1}\longrightarrow 1 \quad (N\longrightarrow\infty).$$

Damit sind die beiden Identitäten in den Hinweisen bewiesen. Nun rechnen wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}(\zeta(k)-1)&=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}-1\right)\\&=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{n^k}-1-\frac{1}{n}\right)\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1.\end{aligned}$$

2. Es gilt $u_n\longrightarrow\infty \Leftrightarrow \forall c\in\mathbb{R}\,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geqslant n_0: u_n>c$.

"$\Rightarrow$" Sei $\epsilon>0$. Sei $c:=\frac{1}{\epsilon}>0$. Es gibt ein n_0 sodass für alle $n\geqslant n_0$ gilt, dass $u_n>c$. Aus der letzten Aussage folgt einerseits $u_n>0$ und andererseits $|0-\frac{1}{u_n}|=\frac{1}{u_n}<\frac{1}{c}=\epsilon$.

"$\Leftarrow$" Sei $c>0$. Setze $\epsilon:=\frac{1}{c}>0$. Also gibt es n_0' mit $n\geqslant n_0\Rightarrow u_n>0$ und n_0'' mit $n\geqslant n_0''\Rightarrow|\frac{1}{u_n}-0|<\epsilon$. Für alle $n\geqslant\max\{n_0',n_0''\}$ gilt $u_n=|u_n|>\frac{1}{\epsilon}=c$.

3.
- f ist stetig bei Null: Sei $\epsilon>0$. Wähle $\delta:=\epsilon$. Sei $x\in\mathbb{R}$ mit $|x-0|<\delta$. Falls $x\in\mathbb{Q}$, folgt $|f(x)-f(0)|=|x-0|<\delta=\epsilon$. Falls $x\notin\mathbb{Q}$, folgt $|f(x)-f(0)|=|0-0|=0<\epsilon$.

- Sei $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Wir zeigen, dass f nicht stetig bei x ist. Sei $\epsilon := \frac{|x|}{2} > 0$. Sei $\delta > 0$. Falls $x \in \mathbb{Q}$ wähle ein beliebiges $x' \in]x-\delta, x+\delta[\setminus \mathbb{Q}$. Es folgt $|f(x) - f(x')| = |x| = 2\epsilon > \epsilon$. Falls $x \notin \mathbb{Q}$ wähle ein beliebiges $x' \in]x-\delta, x+\delta[\cap]x-\epsilon, x+\epsilon[\cap \mathbb{Q}$. Es folgt $|f(x)-f(x')| = |x'| = |x'-x+x| \geqslant ||x'-x| - |x|| = 2\epsilon - |x'-x| > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon$.

4. - Sei $x_0 \in E$. Es gilt, dass f genau dann bei x_0 stetig ist, wenn es ein offenes $U \subset E$ gibt, dass x_0 enthält:

     "$\Rightarrow$" Sei $\epsilon := 1/2$. Also gibt es $\delta > 0$ mit $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}$. Setze $U := B_\delta(x_0)$. Dann ist U eine offene Menge, die x_0 enthält. Wir zeigen $U \subset E$: Sei $x \in U$. Dann ist $|1-f(x)| = |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}$. Also muss $f(x) = 1$ sein und damit $x \in E$.

     "$\Leftarrow$" Sei $\epsilon > 0$. Sei $U \subset E$ offen, $x_0 \in U$. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $|x-x_0| < \delta \Rightarrow x \in U$. Für alle x mit $|x-x_0| < \delta$ folgt also $x \in E$ und damit $f(x) = 1$. Damit ist $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \epsilon$.

   - Der Fall $x_0 \notin E$ wird analog behandelt: Es gilt f stetig bei x_0 genau dann, wenn $\exists U \subset E^c$ offen, $x_0 \in U$.

5. Da generell $\underline{f}^{-1}(U^c) = (\underline{f}^{-1}(U))^c$ gilt, haben wir, dass

   $$\forall U \subset \mathbb{R}^m : U \text{ abgeschlossen} \Rightarrow \underline{f}^{-1}(U) \text{ abgeschlossen}$$

   zu

   $$\forall U \subset \mathbb{R}^m : U \text{ offen} \Rightarrow \underline{f}^{-1}(U) \text{ offen}$$

   äquivalent ist. Nun zur Aufgabe:

   "$\Rightarrow$" Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Wir zeigen, dass $\underline{f}^{-1}(U)$ offen ist. Sei also $x \in \underline{f}^{-1}(U)$. Also ist $f(x) \in U$ und damit ist U eine Umgebung von $f(x)$ in $\mathbb{R}^m$. Es folgt, dass $\underline{f}^{-1}(U)$ eine Umgebung von x in $\mathbb{R}^n$ ist. Also gibt es $\delta > 0$, sodass $B_\delta(x) \subset \underline{f}^{-1}(U)$. Da x beliebig war, ist $\underline{f}^{-1}(U)$ offen.

   "$\Leftarrow$" Sei V Umgebung von $f(x_0)$ in R^m. Es folgt, dass es $\delta > 0$ gibt mit $B_\delta(f(x_0)) \subset V$. Also ist $\underline{f}^{-1}(B_\delta(f(x_0)))$ offen mit $x_0 \in \underline{f}^{-1}(B_\delta(f(x_0))) \subset \underline{f}^{-1}(V)$. Also ist $\underline{f}^{-1}(V)$ Umgebung von x_0.

6. f ist bei 0 unstetig. Sei $\epsilon = 1/2$. Sei $\delta > 0$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ gross genug, dass $x_k := \frac{1}{\pi/2 + 2k\pi} \in]0, \delta[$. Dies ist möglich, da x_k positiv ist und gegen Null konvergiert. Es gilt

   $$|f(x_k) - f(0)| = |\sin \frac{1}{x_k}| = |\sin(\pi/2 + 2k\pi)| = 1 > 1/2.$$

7. (a) Die Implikationrichtung von f konstant nach f stetig ist klar. Sei also f stetig. Sei $x > 0$. Es folgt für $x_n := x/2^n$, dass $f(x) = f(x_n)$. Da f stetig ist, folgt

   $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(0).$$

   (b) Gegenbeispiel: Sei $f(x)$ diejenige eindeutig bestimmte Zahl $y \in [1, 2[$ mit $x = 2^k y$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist f nicht konstant und erfüllt $f(2x) = f(x)$ für alle $x > 0$.