Musterlösung Serie 8

1. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es $\delta > 0$, sodass für alle $x \in E$ mit $d(x, x_0) < \delta$ die Abschätzung $d(f(x), y_0) < \epsilon$ gilt.

   Sein nun $x \in E \cup \{x_0\}$ mit $d(x, x_0) < \delta$. Für $x \in E$ folgt $d(g(x), g(x_0)) = d(f(x), y_0) < \epsilon$. Für $x = x_0$ folgt $d(g(x), g(x_0)) = 0 < \epsilon$.

2. (a)
   - Stetigkeit: Sei $\theta_0 \in [0, 2\pi[$. Sei $\epsilon > 0$. Seien $\delta_1, \delta_2 > 0$ sodass für alle $\theta \in [0, 2\pi[$ gilt dass
     $$|\theta - \theta_0| < \delta_1 \to |\sin\theta - \sin\theta_0| < \epsilon,$$
     $$|\theta - \theta_0| < \delta_2 \to |\cos\theta - \cos\theta_0| < \epsilon.$$
     Setze $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Für $\theta \in [0, 2\pi[$ mit $|\theta - \theta_0| < \delta$ folgt $d_\infty((\cos\theta, \sin\theta), (\cos\theta_0, \sin\theta_0)) < \epsilon$.
   - Bijektivität: Wir definieren die Inverse $f^{-1} : C \longrightarrow [0, 2\pi[$ via
     $$f^{-1}(x, y) = \begin{cases} \arccos x, & y \geqslant 0 \\ 2\pi - \arccos x, & y < 0. \end{cases}$$
     Sei $(x, y) \in C$. Falls $y \geqslant 0$ gilt
     $$f \circ f^{-1}(x, y) = (x, \sin\arccos x).$$
     Da $\sin\arccos x \geqslant 0$, folgt aus $x^2 + y^2 = 1 = x^2 + (\sin\arccos x)^2$, dass $y = \sin\arccos x$. Falls $y < 0$ gilt
     $$\begin{aligned} f \circ f^{-1}(x, y) &= (\cos(2\pi - \arccos x), \sin(2\pi - \arccos x)) \\ &= (x, -\sin\arccos x). \end{aligned}$$
     Da wieder $\sin\arccos x \geqslant 0$ folgt analog wie oben $y = -\sin\arcsin x$. Also ist $f \circ f^{-1}$ die Indentität auf C.
     Sei nun $\theta \in [0, 2\pi[$. Setze $(x, y) = f(\theta)$. Falls $\theta \in [0, \pi]$, gilt $y \geqslant 0$ und damit $f^{-1}(x, y) = \arccos x = \arccos\cos\theta = \theta$. Falls $\theta \in]\pi, 2\pi[$ gilt $y < 0$ und somit (da $x = \cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$), dass $f^{-1}(x, y) = 2\pi - \arccos x = 2\pi - (2\pi - \theta) = \theta$. Also ist $f^{-1} \circ f$ die Identität auf $[0, 2\pi[$.

   (b) Wir zeigen, dass f^{-1} bei $(1, 0)$ unstetig ist. Sei $\epsilon = \pi$. Sei $\delta > 0$ beliebig. Setze $\delta' = \max\{1 - \delta^2/2, 0\} \in [0, 1[$. Setze $\gamma = \arccos\delta' \in]0, \pi/2]$. Sei
   $$(x, y) = (\cos\gamma, -\sin\gamma).$$
   Dann ist $(x, y) \in C$ mit $x \geqslant 0$. Weiterhin gilt $d_2((x, y), (1, 0)) = (x - 1)^2 + y^2 = 2(1 - x) = 2(1 - \delta') \leqslant \delta^2$. Aber $d_2(f^{-1}(x, y), f^{-1}(1, 0)) = d_2(2\pi - \arccos x, \arccos 1) = |2\pi - \underbrace{\arccos x}_{\in[0,\pi/2]} - 0| \geqslant 3/2\pi > \pi = \epsilon$.

3. (a) Wir wählen $h = d_1$. Sei $\epsilon > 0$. Setze $\delta = \epsilon$. Seien $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^{2k}$ mit $d_1((x, y), (x', y')) < \delta$. Also gilt

$$\sum_{j=1,\dots,k} |x_j - x'_j| + \sum_{j=1,\dots,k} |y_j - y'_j| < \delta,$$

also $d_1(x, x') + d_1(y, y') < \delta$. Es folgt $|h(x, y) - h(x', y')| \leqslant |h(x, y) - h(x', y)| + |h(x', y) - h(x', y')| \leqslant |h(x, x')| + |h(y, y')| < \delta = \epsilon$.

(b) Wir definieren die Funktionen

$$f_1, f_2 : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

via $f_1(x) = x$, und $f_2(x) = -x$. Sie sind offensichtlich stetig. Ferner definieren wir

$$f_3, f_4 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$$

via $f_3(x, y) = x + y$, und $f_4(x, y) = x$. Sie sind laut Vorlesung stetig. Auch

$$\begin{aligned} f_5 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k) \times (R^k \times R^k) \\ (x, y) &\longmapsto ((x, y), (x, y)) \end{aligned}$$

ist offensichtlich stetig. Da Polynome stetig sind, ist auch

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 1 \end{aligned}$$

stetig. Durch Einsetzen überprüft man, dass

$$f = p \circ h \circ (f_4, f_3 \circ (f_1, f_2)) \circ f_5.$$

Als Komposition und Kombination stetiger Funktionen ist f also stetig.

(c) Analog wie in der vorigen Teilaufgabe schreibt man g als

$$g = h \circ (q_1 \circ g_2, g_4 \circ (q_2, q_3)) \circ g_1$$

mit den folgenden stetigen Abbildungen:

$$q_1, q_2, q_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$q_1(x) = x^3 + 1$, $q_2(x) = x^2$ und $q_3(x) = x^2 - 1$.

$$g_2, g_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$g_2(x, y) = x$, und $g_2(x, y) = y$.

$$\begin{aligned} g_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \\ (x, y) &\longmapsto ((x, y), (x, y)). \end{aligned}$$

Schliesslich:

$$g_4 := + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

4. (a)
   - $\emptyset, \mathbb{R}^n$ klar.
   - Seien $U_i \in \mathcal{T}, i \in I$. Sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Dann gibt es $i_0 \in I$ mit $x \in U_{i_0}$. Da diese Menge offen ist, gibt es $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset U_{i_0}$. Es folgt $B_\delta(x) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.
   - Seien $U_i \in \mathcal{T}, i \in I$, I endlich. Sei $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$. Dann ist für alle $i \in I$, $x \in U_i$. Also gibt es $\delta_i > 0$ mit $B_{\delta_i}(x) \subset U_i$. Sei $\delta = \min\{\delta_i, i \in I\}$. Diese Zahl existiert und ist grösser als Null, da I endlich ist. Es folgt

     $$B_\delta(x) \subset B_{\delta_i}(x) \subset U_i, \quad \forall\, i \in I.$$

     Also $B_\delta(x) \subset \bigcap_{i \in I} U_i$.

   (b) Die Mengen $U_n :=]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ sind offen, $\{0\}$ hingegen ist nicht offen. Es gilt:

   $$\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

   Sei nämlich $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Wir nehmen an, dass $x \neq 0$, also auch $|x| > 0$. Sei $n_0 \in N$ mit $0 < \frac{1}{n_0} < |x|$. Es folgt $x \notin U_{n_0}$, Widerspruch.

5. (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} (\frac{x}{2})^{n+1} \right|}{\left| \frac{(-1)^n}{((n)!)^2} (\frac{x}{2})^n \right|} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n!}{(n+1)!} \right)^2 (\frac{x}{2})$$
   $$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^2 \frac{x}{2} = 0 < 1.$$

   Nach dem Quotiententest konvergiert die Potenzreihe also auf ganz $\mathbb{R}$ absolut.

   (b) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $U = [x_0 - 1, x_0 + 1]$. Sei

   $$\begin{aligned} f_N : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} (\frac{x}{2})^n. \end{aligned}$$

   Diese Funktionen sind als Polynome stetig. Nach (a) konvergieren die stetigen Funktionen $f_N\big|_U$ gleichmässig gegen $f\big|_U$. Damit ist f bei x_0 stetig.

6. (a) Es gilt mit der Dreiecksungleichung

   $$0 \leqslant d(a, f(a)) \leqslant \underbrace{d(a, x_{n+1})}_{\to 0} + \underbrace{d(x_{n+1}, f(x_n))}_{=0} + \underbrace{d(f(x_n), f(a))}_{\to 0}.$$

   Also $d(a, f(a)) = 0$ und damit $a = f(a)$.

   (b) Gegenbeispiel: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x$. Nehme $x_0 = 1$. Dann ist $x_n = (-1)^n$.