Musterlösung Serie 9

1. (a) Es gilt $i^{2n} - (-i)^{2n} = 0$ und $i^{2n+1} - (-i)^{2n+1} = 2i(-1)^n$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\exp(iz) - \exp(-iz) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-i)^n z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(i^n - (-i)^n) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(i^{2n} - (-i)^{2n}) z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(i^{2n+1} - (-i)^{2n+1}) z^{2n} \\
&= 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(-1)^n z^{2n} \\
&= 2i \sin z.
\end{aligned}$$

Absolute Konvergenz folgt aus

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \right| &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)!} |z|^{2n+1} \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |z|^n = \exp |z|.
\end{aligned}$$

Die Rechnung für den Kosinus geht analog.

(b) Es gilt

$$\cos x + i \sin x = \frac{1}{2}(\exp(ix) - \exp(-ix) + \exp(ix) + \exp(-ix)) = \exp(ix).$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x + x) \\
&= \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x \\
&= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\cos x \sin x \sin x \\
&= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x \\
&= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos x \cos^2 x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x.
\end{aligned}$$

Die Rechnung mit Sinus geht analog.

(d) Es gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
|\sin(x)|^2 &= \sin(x)\overline{\sin(x)} \\
&= \frac{1}{4}(\exp(ix) - \exp(-ix))\overline{(\exp(ix) - \exp(-ix))} \\
&= \frac{1}{4}(\exp(ix) - \exp(-ix))(\exp(-ix) - \exp(ix)) \\
&= \frac{1}{4}(\exp(ix)\exp(-ix) - \exp(ix)\exp(ix) - \exp(-ix)\exp(-ix) + \exp(-ix)\exp(ix)) \\
&= \frac{1}{4}(\exp(ix - ix) - \exp(2ix) - \exp(-2ix) + \exp(-ix + ix)) \\
&= \frac{1}{4}(1 - \exp(2ix) - \exp(-2ix) + 1) \\
&= \frac{1}{4}(2 - \exp(2ix) - \exp(-2ix))
\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}
|\cos(x)|^2 &= \cos(x)\overline{\cos(x)} \\
&= \frac{1}{4}(\exp(ix) + \exp(-ix))\overline{(\exp(ix) + \exp(-ix))} \\
&= \frac{1}{4}(\exp(ix) + \exp(-ix))(\exp(-ix) + \exp(ix)) \\
&= \frac{1}{4}(\exp(ix)\exp(-ix) + \exp(ix)\exp(ix) + \exp(-ix)\exp(-ix) + \exp(-ix)\exp(ix)) \\
&= \frac{1}{4}(\exp(ix - ix) + \exp(2ix) + \exp(-2ix) + \exp(-ix + ix)) \\
&= \frac{1}{4}(1 + \exp(2ix) + \exp(-2ix) + 1) \\
&= \frac{1}{4}(2 + \exp(2ix) + \exp(-2ix))
\end{aligned}$$

Also $|\sin x|^2 \leqslant |\sin x|^2 + |\cos x|^2 = 1$ und analog für den Kosinus.

2. Es bezeichne $\mathrm{Re} z$ den Realteil einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} \exp(-ma)\cos(mb) &= \mathrm{Re} \sum_{m=0}^{\infty} \exp(-ma + imb) \\
&= \mathrm{Re} \frac{1}{1 - \exp(-a + ib)}
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Formel für die geometrische Reihe verwendet wurde, was wegen $|\exp(-a + ib)|^2 = \exp(-a + ib)\exp(-a - ib) = (\exp(2a))^{-1} < 1$ erlaubt ist. Umformen gibt den Ausdruck auf dem Aufgabenblatt.

3. Sei $(x_n)_n$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^k$. Sei $j \in \{1, \dots, k\}$. Dann ist $(a_n^j)_n$ mit $a_n^j := (x_n)_j$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es n_0, sodass für alle $n, m \geqslant n_0$ gilt dass $d_\infty(x_n, x_m) < \epsilon$. Da $|a_n^j - a_m^j| < d_\infty(x_n, x_m)$ folgt,

dass $(a_n^j)_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist, die also konvergent ist. Bezeichne a^j den Grenzwert.

Es gilt nun, dass x_n gegen $a := (a^1, \dots, a^k)$ konvergiert. Sei nämlich $\epsilon > 0$. Dann gibt es $n_1, \dots, n_k$ sodass für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ gilt: Für alle $n \geqslant n_j$ haben wir $|a_n^j - a^j| < \epsilon$. Sei $n_0 := \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Dann ist für alle $n \geqslant n_0$: $d_\infty(x_n, a) < \epsilon$.

4. (a) Nein. Bsp: $f(x) = x + (1 - x^2)i$.

   (b) Ein solches Polynom ist nach oben und unten unbeschränkt, wegen dem Zwischenwertsatz also surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_0) \leqslant y \leqslant p(x_1)$, da p nach oben und nach unten unbeschränkt ist. Nach dem Zwischwenwertsatz gibt es ein $x \in [x_0, x_1] \subset \mathbb{R}$ (bzw. in $[x_1, x_0]$ wenn $x_0 > x_1$) mit $p(x) = y$.

5. Gegeben ist die stetige Funktion $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi(0) = \phi(1)$.

   Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion

$$\begin{array}{rccl} F_n\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ & x & \mapsto & F_n(x) := \phi(x) - \phi(x + \frac{1}{n}). \end{array} \tag{1}$$

   Offensichtlich ist auch jede Funktion F_n stetig und die Behauptung ($\exists\, x_n\colon\ \phi(x_n) = \phi(x_n + \frac{1}{n})$) gilt genau dann, wenn F_n eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ besitzt.

   Jetzt betrachten wir die Summe

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_n(x_{k,n})$$

   wobei $x_{k,n} := \frac{k}{n}$ ist. Wenn wir die Definition einsetzen und ausrechenen, kriegen wir eine Teleskopsumme

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_n(x_{k,n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \phi(x_{k,n}) - \phi(x_{k+1,n}) =$$

$$= \phi(0) - \phi(\frac{1}{n}) + \phi(\frac{1}{n}) - \dots - \phi(\frac{n-1}{n}) + \phi(\frac{n-1}{n}) - \phi(\frac{n}{n}) = \phi(0) - \phi(1) = 0$$

   nach Voraussetzung.

   Dann sind entweder alle Summanden gleich Null, ansonsten gibt es mindestens einen positiv und einen negativ. Im ersten Fall besitzt F_n mindestens n Nullstellen, im zweiten Fall es existieren $p, q \in \{0, \dots, n-1\}$ so, dass $F(x_{p,n}) > 0$ und $F(x_{q,n}) < 0$ und wir können den Zwischenwertsatz anwenden um eine Nullstelle $x_n \in (\frac{p}{n}, \frac{q}{n}) \subset [0, 1]$ zu finden.

6. (a) Für alle $x \in [a, b]$ ist f auf dem beschränkten und abgeschlossenen Intervall $[a, x]$ stetig.

   (b) Sei $x_0 \in [a, b]$ Wir zeigen, dass f bei x_0 stetig ist.

   - 1. Fall: $f(x_0) < M(x_0)$:
     Da f stetig ist, gibt es $\delta > 0$, mit $f(x) < M(x_0)$ für $x \in [a, b] \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Das Maximum auf $[a, x_0]$ wird also auf $[a, x_0 - \delta]$ angenommen. Es folgt: $M(x) = M(x_0)$ für $x \in [a, b] \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

- 2. Fall: $f(x_0) = M(x_0)$:
  Sei $\epsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ sodass $\forall z \in [a, b]$ mit $|z - x_0| < \delta$ gilt, dass $|f(z) - f(x_0)| < \epsilon$. Sei $x \in [a, b]$ mit $|x - x_0| < \delta$.
  - Fall $x \leqslant x_0$:
    Es gilt $f(x) \leqslant M(x) \leqslant M(x_0) = f(x_0)$, also $|M(x) - M(x_0)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
  - Fall $x \geqslant x_0$:
    Es gilt $M(x) = f(y)$ für ein $y \in [a, x]$, da f stetig ist. Da $M(x_0) = f(x_0)$ können wir $y \in [x_0, x]$ voraussetzen. Es gilt nun $|M(x_0) - M(x)| = |f(x_0) - f(y)| < \epsilon$, da $|y - x_0| \leqslant |x - x_0| < \delta$.

Mit $-m(x) = \max\{-f(t) : a \leqslant t \leqslant x\}$ folgt damit auch die Stetigkeit von m.