MATH, PHYS, CHAB | Analysis I | HS 2013
Prof. Dr. E. Kowalski

Musterlösung Serie 10

1. (a) $f \circ \lambda$ ist als Komposition von stetigen Funktionen stetig. Da λ 2π-periodisch ist, gilt dies auch für $f \circ \lambda$.

   (b) Seien $f, g \in C(S^1)$. Für alle $\theta \in \mathbb{R}$ gelte $f(\lambda(\theta)) = g(\lambda(\theta))$. Da λ surjektiv ist folgt, $f(x) = g(x)$ für alle $x \in S^1$.

   (c) Sei $g \in P$. Es bezeichne μ die Inverse von $\lambda_{[0,2\pi[}$. Wir setzen

$$f(x) := \begin{cases} g(\mu(x)) & \text{if } x \neq (1,0), \\ g(0) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

   Diese Funktion ist stetig: Auf $C \setminus \{(1,0)\}$ ist dies klar. Für eine Folge $x_n \in S^1$ mit $x_n \to (1,0$ gilt entweder $\mu(x_n) \geqslant \pi$ ab einem bestimmten n_0 oder $\mu(x_n) \leqslant \pi$ ab einem gewissen n_0 oder die Folge lässt sich in zwei Teilfolgen aufspalten für die jeweils eine der obigen Aussagen zutreffen. In den ersten zwei Fällen gilt $\mu(x_n) \to 2\pi$ oder $\mu(x_n) \to 0$ und damit $g(\mu(x_n)) \to g(1,0)$, da g stetig ist und $g(0) = g(2\pi)$. Im letzten Fall gilt diese Aussage auf beiden Teilfolgen, also auch für die ganze Folge. Also ist f stetig.

   Es bleibt zu zeigen, dass $\lambda^* f = g$. Sei $\theta \in \mathbb{R}$. Für $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ gilt $f(\lambda(\theta)) = g(0) = g(\theta)$. Für $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ ist $\mu(\lambda(\theta)) - \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ und damit $f(\lambda(\theta)) = g(\mu(\lambda(\theta))) = g(\theta)$.

2. Sei $g(x) := f(x) - f(-x)$. Dann gilt mit der Notation von Aufgabe 1 $\lambda^* g(\theta) = f(\lambda(\theta)) - f(\lambda(\theta + \pi))$. Also

$$\begin{aligned} \lambda^* g(0) &= f(1,0) - f(-1,0) \\ \lambda^* g(\pi) &= -f(1,0) + f(-1,0) = -\lambda^* g(0) \end{aligned}$$

   Es folgt die Existenz einer Nullstelle θ_0 von $\lambda^* g$: Entweder ist 0 eine Nullstelle von $\lambda^* g$, oder $\lambda^* g(0) \neq 0$. OBdA $\lambda^* g(0) > 0$. Dann ist $\lambda^* g(\pi) < 0$ und nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\theta_0 \in [0, \pi]$ mit $\lambda^* g(\theta_0) = 0$. Es folgt, dass $\lambda(\theta_0)$ eine Nullstelle von g ist.

3. (a) Punktweise Konvergenz: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2} = 0$. Die Folge konvergiert also auf ganz $\mathbb{R}$ punktweise gegen die Nullfunktion. Sei g die Nullfunktion auf $\mathbb{R}$. Es gilt $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)| = |f_n(n) - g(n)| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Also ist die Konvergenz nicht gleichmässig.

   (b) Sei $M := \max\{|a|, |b|\}$. Dann ist $I \subset J := [-M, M]$. Sei $n \geqslant 2M$ und $|x| \leqslant M$. Es gilt $|n-x| \geqslant ||n|-|x|| = n-|x| \geqslant n-M \geqslant n-n/2 = n/2$.

Es folgt für $n \geqslant 2M$, dass

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in I} \Big| \frac{1}{1+(x-n)^2} - 0 \Big| &= \sup_{x\in I} \frac{1}{1+(x-n)^2} \\
&\leqslant \sup_{x\in J} \frac{1}{1+(x-n)^2} \\
&\leqslant \sup_{x\in J} \frac{1}{1+n^2/4} \\
&= \frac{1}{1+n^2/4} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

für $n \to +\infty$.

4. (a) Das definierende Maximum existiert, da $x \mapsto |f(x) - g(x)|$ stetig auf $[0,1]$ ist.

   (b) Die Symmetrie ist klar. Die Definitheit ist klar bis auf die Implikation $d(f,g) = 0 \to f = g$. Aus der Voraussetzung $d(f,g) = 0$ folgt für alle $x \in [0,1]$, dass $0 \leqslant |f(x) - g(x)| \leqslant d(f,g) = 0$. Also ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Die Dreiecksungleichung folgt aus der Abschätzung $|f(x)-h(x)| = |f(x)-g(x)+g(x)-h(x)| \leqslant |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|$.

   (c) f_n konvergiert definitionsgemäss genau dann gleichmässig gegen f wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant n_0 \forall x \in [0,1] : |f(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

   Die Folge $d(f, f_n)$ ist genau dann eine Nullfolge, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geqslant n_0 : \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

   In beiden Definitionen kann man das $< \epsilon$ am Schluss durch $\leqslant \epsilon$ ersetzen, da die Aussagen für alle $\epsilon > 0$ gelten sollen. Nun folgt die Aufgabe aus der allgemeinen Beziehung

$$\sup M \leqslant R \Leftrightarrow \forall x \in M : x \leqslant R$$

5. (a)

$$\begin{aligned}
\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^k &= \left(\exp(\frac{1}{k}\log a)\right)^k \\
&= \prod_{j=1}^{k} \exp(\frac{1}{k}\log a) \\
&= \exp(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k}\log a) \\
&= \exp\log a = a.
\end{aligned}$$

   Also ist $a^{\frac{1}{k}}$ eine Lösung der Gleichung. Sie ist in $]0,+\infty[$ da das Bild der Exponentialfunktion dort liegt. Die Gleichung $x^k = a$ hat maximal eine Lösung auf $]0,+\infty[$, da die Funktion $x \mapsto x^k$ auf $]0,+\infty[$ streng monoton wachsend ist, und damit injektiv ist.

(b) Die Funktion ist Komposition von stetigen Funktionen.

(c) Es gilt $\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \frac{1}{k}\log a = -\infty$. Also $\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \exp(\frac{1}{k}\log a) = 0$.

6. Sei $a \in \mathbb{R}$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > a$. Es folgt für $x > 0$, dass

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \geqslant \frac{1}{k!}x^k.$$

Es folgt, da exp bzw. log monoton wächst und unbeschränkt ist, dass

$$\frac{\exp x}{x^a} \geqslant \frac{1}{k!}\frac{x^k}{x^a} = \frac{1}{k!}\exp(\underbrace{(k-a)}_{>0}\underbrace{\log x}_{\to+\infty}) \longrightarrow +\infty.$$