MATH, PHYS, CHAB — Analysis I — HS 2013

Prof. Dr. E. Kowalski

Musterlösung Serie 11

1. Die partiellen Summen einer alternierenden Reihe mit im Betrag monoton fallenden Koeffizienten sind Schranken für den Wert der Reihe. Also folgt aus $\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$, dass
$$\frac{1}{3} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} < \frac{1}{e} < 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2. (a) Konvergente Potenzreihen auf $\mathbb{R}$ sind laut Vorlesung auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und ihre Ableitung berechnet sich gliedweise:
$$J_0'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} \frac{1}{2}$$
$$J_0''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2n(2n-1) \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-2} \frac{1}{4}$$
Also gilt
$$\begin{aligned} x^2 J_0''(x) + xJ_0'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2n(2n-1) \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-2} \frac{x^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1} \frac{x}{2} \\ &= x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \Big(2n(2n-1) + 2n\Big) \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n-1)} \\ &= x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 4n^2 \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n-1)} \\ &= -x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{((n-1)!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(n-1)} \\ &= -x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n)!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = -x^2 J_0(x). \end{aligned}$$

   (b) Es gilt $J_0(0) = 1$. Wir behaupten, dass $J_0(3) < 0$, woraus nach dem Zwischenwertsatz die Aussage folgt. Die Reihe
$$J_0(3) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n}$$
ist eine alternierende Reihe. Der Betrag der Koeffizienten ist
$$c_n := \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n}, \quad n > 0.$$
Es gilt, für $n \in \mathbb{N}$, dass
$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left(\frac{3}{2} \frac{n!}{(n+1)!}\right)^2 = \left(\frac{3}{2} \frac{1}{n+1}\right)^2 \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^2 < 1.$$

Also fällt c_n monoton. Es folgt

$$J_0(3) - 1 \leqslant \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n} = -\frac{20583}{16384}$$

Also folgt $J_0(3) \leqslant 1 - \frac{20583}{16384} = -\frac{4199}{16384} < 0$.

3. Setze $\epsilon = 1$. Sei $\delta > 0$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.\end{aligned}$$

Also gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $|\sqrt{n} - \sqrt{n+1}| < \delta$. Es gilt $|f(\sqrt{n}) - f(\sqrt{n+1})| = |n - (n+1)| = 1 \geqslant \epsilon$.

4. Wir nehmen an, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass es für alle $\delta > 0$ zwei Punkte $x, y \in I$ gibt mit $|x - y| < \delta$ aber $|f(x) - f(y)| \geqslant \epsilon$. Sei $n \in \mathbb{N}$ wir erhalten also Punkte $x_n, y_n \in I$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \epsilon$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ von $(x_n)_n$ die gegen $x \in I$ strebt. Nach dem gleichen Satz enthält die Folge $(y_{n_k})_k$ eine konvergente Teilfolge $(y_{n_{k_l}})_l$, die gegen einen Punkt $y \in I$ strebt. Es gibt also zwei Folgen in I, deren Folgeglieder durch

$$x'_l := x_{n_{k_l}}, \qquad y'_l := y_{n_{k_l}}$$

gegeben sind und die gegen x bzw. y konvergieren. Es gilt

$$|x'_l - y'_l| = |x_{n_{k_l}} - y_{n_{k_l}}| < \frac{1}{n_{k_l}} \leqslant \frac{1}{k_l} \leqslant \frac{1}{l},$$

was gegen Null konvergiert. Also gilt $x = y$. Da f stetig ist, gilt

$$0 = |f(x) - f(y)| = \lim_{l\to+\infty} |f(x'_l) - f(y'_l)| \geqslant \epsilon > 0.$$

Widerspruch.

5. (a) Die Potenzreihe des Sinus konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$. Also ist der Sinus differenzierbar und die Ableitung berechnet sich gliedweise:

$$\sin' x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \cos x$$

Nun berechnen wir mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dx} \sin x^2 = 2x \cos x^2.$$

(b) Es gilt

$$\frac{d}{dx} 2 \sin x \cos x = \frac{d}{dx} \sin(2x) = 2\cos(2x)$$

(c) Mit der Kettenregel folgt

$$\frac{d}{dx}e^{\cos e^x} = e^{\cos e^x}\frac{d}{dx}\cos e^x = -e^{\cos e^x}\sin e^x e^x$$

(d) Mit der Kettenregel und der ersten Teilaufgabe folgt $i'(x) = a\cos(ax+t)$.

(e) Mit der Kettenregel und $e^x = \exp x$ folgt

$$j'(x) = (2x+1)e^{x^2+x+1}.$$

(f) Mit der vorigen Teilaufgabe und einer Kombination aus Produkt- und Kettenregel folgt

$$k'(x) = 2e^{x^2+x+1} + (2x+1)^2 e^{x^2+x+1}.$$