Musterlösung Serie 12

1. Die differenzierbarkeit der Funktionen ergibt sich jeweils aus der Produkt-, Summen-, Ketten- und Quotientenregel.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\
f''(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}. \\
g'(x) &= -\sin(\cos x)(-\sin x) = \sin x \sin(\cos x) \\
g''(x) &= \cos x \sin(\cos x) - \sin x \cos(\cos x) \sin x = \cos x \sin(\cos x) - \sin^2 x \cos(\cos x). \\
h'(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\
h''(x) &= \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3} \\
k'(x) &= k(x)h'(x) = \exp\big(\frac{1}{1+x^2}\big)\frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\
k''(x) &= k'(x)h'(x) + k(x)h''(x) = k(x)\big(h'(x)^2 + h''(x)\big) \\
&= \exp\big(\frac{1}{1+x^2}\big)\left(\frac{4x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}\right) \\
&= \exp\big(\frac{1}{1+x^2}\big)\frac{4x^2 + (1+x^2)(-2+6x^2)}{(1+x^2)^4} \\
&= \exp\big(\frac{1}{1+x^2}\big)\frac{-2+8x^2+6x^4}{(1+x^2)^4}
\end{aligned}
$$

2.
- Zu f: Randwerte $f(0) = f(2\pi) = 0$ mit Ableitung $f'(0) = f'(2\pi) = 1$. Extrema: $f'(x) = \cos x = 0$ und $x \in [0, 2\pi]$ implizieren zusammen $x \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$. Es gilt $f(\pi/2) = 1$ und $f(3\pi/2) = -1$. Also hat f lokale Minima bei 0 und $3\pi/2$ wobei letzteres ein globales Minimum ist. Ferner hat f lokale Maxima bei $\pi/2$ und 2π wobei ersteres ein globales Maximum ist.
- g ist differenzierbar mit $g'(x) = \exp\big(\frac{1}{1+x^2}\big)\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0$ genau dann wenn $x = 0$. Also gibt es nur ein Extremum bei Null was wegen $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 1$ ein Maximum ist. Als einziges Maximum ist es ein globales.
- Da $|x| > 0$ für $x \neq 0$ ist 0 ein globales Minimum. Die Randwerte bei $x \in \{-1, 1\}$ sind Maxima.
- Es gilt $k'(x) = x^2 - 1$ was die Nullstellenmenge $\{-1, 1\}$ hat. Es gilt $k''(x) = 2x$ also hat k bei -1 ein Maximum und bei 1 ein Minimum mit Werten $\pm 2/3$. Die Randwerte sind $k(-2) = -2/3$ und $k(2) = 2/3$ mit $k'(-2) > 0$ und $k'(2) > 0$. Damit gibt es zwei lokale Minima und zwei lokale Maxima.

3. (a) Sei $|x| < R$. Es ist zu zeigen, dass $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ konvergiert. Es gilt, dass $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ als Potenzreihe für $|x| < R$ absolut konvergiert. Also gilt

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n|}{n+1} |x|^{n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n||x|^n R \leqslant R \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n||x|^n$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Absolute Konvergenz einer Reihe impliziert Konvergenz.

(b) Für $|x| < R$ konvergente Potenzreihen sind auf $\{|x| < R\}$ differenzierbar und ihre Ableitung berechnet sich gleidweise:

$$f_c'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(n+1)x^n = g(x).$$

4. (a) Auf $]-\pi/2, \pi/2[$ ist der Kosinus strikt grösser Null.

(b) Es gilt $\lim_{x\to\pi/2, x<\pi/2} \sin(x) = 1 > 0$ und $\lim_{x\to\pi/2, x<\pi/2} \cos(x) = 0$. Also ist $\lim_{x\to\pi/2, x<\pi/2} \tan(x) = +\infty$. Analog: $\lim_{x\to-\pi/2, x>\pi/2} \tan(x) = -\infty$. Also ist tan als stetige Funktion nach dem Zwischenwertsatz surjektiv.

Es gilt $\tan'(x) = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2 x} > 1$. Also ist tan streng monoton wachsend und damit injektiv.

(c) Nach dem Quotientenkriterium und Aufgabenteil (a) ist tan differenzierbar und nach Aufgabenteil (b) ist die Ableitung $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ nie Null. Nach der Umkehrregel ist also auch arctan differenzierbar und es gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2 \arctan(x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

(d) Nach dem vorigen Aufgabenteil ist arctan streng monton wachsend auf ganz $\mathbb{R}$. Da es keine Randwerte gibt, gibt es auch keine Extrema.

(e) Für $|x| < 1$ gilt $|x^2| = |x|^2 < 1$ und damit

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Mit Aufgabe 3 folgt, dass

$$g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

für $|x| < 1$ wohldefiniert und differenzierbar ist mit

$$(g - \arctan\big|_{]-1,1[})' = 0.$$

Also ist $g - \arctan\big|_{]-1,1[}$ eine konstante Funktion mit $g(0) - \arctan(0) = 0$. Also ist $g = \arctan\big|_{]-1,1[}$.