Musterlösung Serie 13

1. Wir beweisen die Aussage $A(n) :\Leftrightarrow (f \in C^n(\mathbb{R})) \wedge (f^{(n)}(0) = 0) \wedge (\exists p_n \text{ Polynom } f^{(n)}(x) = p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0)$ durch Induktion. Für $n = 0$ gilt sie mit $p_0 = 1$ und $\lim_{x\to 0, x\neq 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$. Nun zum Schritt: Gelte $A(n)$. Für $x = 0$ berechnen wir

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} p_n(\frac{1}{h})e^{-\frac{1}{h^2}} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} x p_n(x) e^{-x} = 0. \end{aligned}$$

wobei der Limes in der letzten Zeile meint, dass es keine Rolle spielt, ob nun x gegen $+\infty$ oder $-\infty$ strebt. Ferner gilt für $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) \\ &= p_n'(\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}} + p_n(\frac{1}{x})\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = p_{n+1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}, \end{aligned}$$

wo $p_{n+1}(y) := -p_n'(y)y^2 + 2y^3 p_n(y)$ ein Polynom ist. Ferner ist

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} f^{(n+1)}(x) = 0 = f^{(n+1)}(0),$$

da die Exponentialfunktion schneller als jedes Polynom wächst. Also ist $f^{(n)} \in C^1(\mathbb{R})$.

2. Wir zeigen die Aussage mit Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Der Anker ist klar, da das Produkt von stetigen Funktionen stetig ist. Gelte die Aussage für n. Dann folgt für $f, g \in C^{n+1}(\mathbb{R})$, dass für $l \in \{0, \ldots, n\}$ $f^{(l)}, g^{(l)} \in C^1(\mathbb{R})$. Damit ist nach Induktionsvoraussetzung $fg \in C^n(\mathbb{R})$ mit

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

was nach der Produktregel in $C^1(\mathbb{R})$ liegt. Ferner folgt

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d}{dx}(f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) + f^{(n+1)}(x)g(x) + f(x)g^{(n+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x),
\end{aligned}
$$

wo wir

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1) + n!k}{(n-k+1)!k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}
$$

verwendet haben.

3. (a) Wir beweisen die Aussage $A(n) :\Leftrightarrow$ es existiert ein Polynom H_n vom Grad n mit $\psi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2}$. Die Verankerung geht mit $H_0(x) := 1$. Der Schritt geht wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\psi_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} \\
&= (-1) \frac{d}{dx} \psi_n(x) \\
&= (-1) \frac{d}{dx} (H_n(x)e^{-x^2}) \\
&= (-1)(H_n'(x)e^{-x^2} + H_n(x)e^{-x^2}(-2x)) = H_{n+1}(x)e^{-x^2},
\end{aligned}
$$

wo $H_{n+1}(x) := 2xH_n(x) - H_n'(x)$ ein Polynom vom Grad $n+1$ ist, da H_n vom Grad n und H_n' vom Grad $n-1$ ist.

(b) Mit Aufgabe 2 berechnen wir

$$
\begin{aligned}
H_n'(x) &= \frac{d}{dx}(e^{x^2}(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}) \\
&= 2xH_n(x) + e^{x^2}(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(-2xe^{-x^2}) \\
&= 2xH_n(x) + e^{x^2}(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}(-2x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} e^{-x^2} \\
&= 2xH_n(x) + e^{x^2}(-1)^n \Big(-2x \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} - 2n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \Big) \\
&= 2xH_n(x) + \Big(-2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) \Big) = 2nH_{n-1}(x).
\end{aligned}
$$

Damit folgt $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.

4. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\log(1+x) &= \log 1 + \frac{1}{1+x}\Big|_{x=0} x + \frac{1}{2}(-(\frac{1}{1+x})^2)\Big|_{x=0} x^2 + \frac{1}{3!}(2(\frac{1}{1+x})^3\Big|_{x=\xi})x^3 \\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^3 x^3,
\end{aligned}
$$

für ein $\xi \in [0, x]$. Es folgt mit $x = 1/2$

$$
|\log(\frac{3}{2}) - \frac{3}{8}| \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{8} \sup_{\xi \in [0,\frac{1}{2}]} |\frac{1}{1+\xi}|^3 = \frac{1}{24}
$$

5. Setze $f(x) := \sin(x^2)$ und $g(x) := \sin(x)$. Es folgt wegen der Differenzierbarkeit

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x^2)}{\sin(x)} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\frac{g(x)-g(0)}{x-0}} \\
&= \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.
\end{aligned}
$$

6. Wir können oBdA annehmen, dass die x_i und y_i alle ungleich Null sind. Seien $X := \sum_i x_i^p \neq 0$ und $Y := \sum_i y_i^q \neq 0$. Mit der Youngschen Ungleichung finden wir

$$
\frac{x_i}{X^{\frac{1}{p}}} \frac{y_i}{Y^{\frac{1}{q}}} = \left(\frac{x_i^p}{X}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{y_i^q}{Y}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{q}\frac{x_i^p}{X} + \frac{1}{q}\frac{y_i^q}{Y}
$$

Das summieren wir nun von $i = 1$ bis $i = n$ und erhalten

$$
\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X^{\frac{1}{p}}} \frac{y_i}{Y^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
$$

Jetzt multiplizieren wir beiden Seiten mit $X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}$.