Serie 1

1. Stellen Sie Wahrheitstafeln zu folgenden zwei Aussagen auf. Sind diese Aussagen wahr?

   (a) $(A \to B) \leftrightarrow (B \vee (\neg A))$.

   (b) $((A \to B) \wedge B) \to A$.

2. Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Aussagen um Tautologien handelt.

   (a) $\neg\neg A \leftrightarrow A$

   (b) $\neg(A \wedge \neg A)$

   (c) $(A \wedge \neg A) \to B$

   (d) $(\neg B \to \neg A) \leftrightarrow (A \to B)$

3. Sei X eine Menge. Zeigen Sie die Gesetze von *de Morgan*: Für alle $A, B \subset X$:
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \qquad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$
   Dabei ist $A^c = X \setminus A$.

4. Beweisen Sie die folgenden Aussagen $A(n), B(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$.

   (a)
$$A(n) :\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1) \right).$$

   (b)
$$B(n) :\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2 \right).$$

   Tipp zu $B(n)$: Beim Induktionsschritt nicht direkt den ersten Aufgabenteil verwenden, sondern erst eine binomische Formel anwenden.

5. Sei X eine Menge. Für alle Teilmengen $A \subset X$ ist die *charakteristische Funktion* von A definiert als $\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$ mit Abbildungsvorschrift
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$
   Sei nun $\{0,1\}^X$ die Menge der Funktionen $X \to \{0,1\}$. Ferner bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Menge der Teilmengen von X.

   Verifizieren Sie, dass die folgende Abbildung eine Bijektion ist.
$$\begin{aligned} \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \{0,1\}^X \\ A &\mapsto \chi_A \end{aligned}$$

6. **Multiple Choice Aufgaben:**

Bei einigen Aufgaben können auch mehrere Antworten richtig sein. Eine Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet.
Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe "Weiss ich nicht." So erhalten wir eine bessere Rückmeldung.

1. Sei $X = \{a, \{b, c\}, \emptyset\}$ eine Menge mit drei Elementen. Hier bezeichnet $\emptyset$ die leere Menge. Nehmen Sie an, dass a, b und c paarweise verschieden sind. Welche der folgenden Ausdrücke gleicht der Potenzmenge von X?

(a) $\{a, \{b, c\}, \emptyset, b, c\}$.

(b) $\{\{a\}, \{b, c\}, \{\emptyset\}, \{a, \{b, c\}\}, \{a, \emptyset\}, \{\{b, c\}, \emptyset\}, X, \emptyset\}$.

(c) $\{\{a\}, \{\{b, c\}\}, \{\emptyset\}, \{a, \{b, c\}\}, \{a, \emptyset\}, \{\{b, c\}, \emptyset\}, X, \emptyset\}$.

(d) $\{\{a\}, \{\{b, c\}\}, \{\emptyset\}, \{a, \{b, c\}\}, \{a, \emptyset\}, \{\{b, c\}, \emptyset\}, X\}$.

(e) Keiner.

2. Seien D und E Mengen. Seien $A_\epsilon(x, y)$ und $B_\epsilon(x, y)$ Aussagen für $x, y \in D$, $\epsilon \in E$. Sei $x_0 \in D$. Welcher logische Ausdruck ist die Negation von

$$\forall\, \epsilon \in E\ \exists\, \delta \in E\ \forall\, x \in D\, (A_\delta(x_0, x) \Rightarrow B_\epsilon(x_0, x))\ ?$$

(a) $\forall\, \epsilon \in E\ \exists\, \delta \in E\ \forall\, x \in D\, ((\neg B_\epsilon(x_0, x)) \wedge A_\delta(x_0, x))$.

(b) $\exists\, \epsilon \in E\ \forall\, \delta \in E\ \exists\, x \in D\, ((\neg B_\epsilon(x_0, x)) \wedge A_\delta(x_0, x))$.

(c) $\exists\, \epsilon \in E\ \forall\, \delta \in E\ \exists\, x \in D\, (A_\delta(x_0, x) \Rightarrow B_\epsilon(x_0, x))$.

(d) Keiner.

3. Seien X und Y nichtleere Mengen, wobei Y mindestens zwei Elemente enthalten soll. Sei $y_0 \in Y$ fest gewählt. Definiere

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \times Y \\ x &\mapsto (x, y_0). \end{aligned}$$

Welche Aussagen treffen zu?

(a) Die Funktion ist injektiv.

(b) Die Funktion ist surjektiv.

(c) Die Funktion ist bijektiv.

(d) Keine.

4. Seien X und Y wie oben gegeben. Definiere

$$\begin{aligned} X \times Y &\longrightarrow X \\ (x, y) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Welche Aussagen treffen zu?

(a) Die Funktion ist injektiv.

(b) Die Funktion ist surjektiv.

(c) Die Funktion ist bijektiv.

(d) Keine.

5. Seien X und Y wie oben gegeben, $y_0 \in Y$. Definiere

$$\begin{aligned} Y &\longrightarrow Y \\ y &\mapsto y_0. \end{aligned}$$

Welche Aussagen treffen zu?

(a) Die Funktion ist injektiv.

(b) Die Funktion ist surjektiv.

(c) Die Funktion ist bijektiv.

(d) Keine.

Abgabe: Freitag, den 27. September 2013.