MATH, PHYS, CHAB | Analysis I | HS 2013
Prof. Dr. E. Kowalski

Serie 2

1. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen, sodass $g \circ f : X \longrightarrow Z$ *bijektiv* ist. Beweisen Sie die folgenden Aussagen, oder widerlegen Sie sie mit einem Gegenbeispiel.

   (a) f ist injektiv,

   (b) f ist surjektiv,

   (c) g ist injektiv,

   (d) g ist surjektiv.

2. Seien M, N Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung. Definiere

$$\begin{aligned} \underline{f} : \mathcal{P}(M) &\longrightarrow \mathcal{P}(N) \\ X &\mapsto \{f(x), x \in X\}, \end{aligned}$$

   und

$$\begin{aligned} \underline{f}^{-1} : \mathcal{P}(N) &\longrightarrow \mathcal{P}(M) \\ Y &\mapsto \{x \in M : f(x) \in Y\}. \end{aligned}$$

   Beweisen Sie:

   (a) Für beliebige Mengen $A, B \subset N$ gilt:

$$\underline{f}^{-1}(A \cap B) = \underline{f}^{-1}(A) \cap \underline{f}^{-1}(B),$$

$$\underline{f}^{-1}(A \cup B) = \underline{f}^{-1}(A) \cup \underline{f}^{-1}(B).$$

   (b) Für beliebige Mengen $X, Y \subset M$ gilt:

$$\underline{f}(X \cap Y) \subset \underline{f}(X) \cap \underline{f}(Y),$$

$$\underline{f}(X \cup Y) = \underline{f}(X) \cup \underline{f}(Y).$$

   (c) Geben Sie ein Beispiel an, für das im Fall **b**) $\underline{f}(X \cap Y)$ eine echte Untermenge von $\underline{f}(X) \cap \underline{f}(Y)$ ist.

3. Zeigen Sie dass die folgenden Abbildungen nicht injektiv sind. Sind sie surjektiv?

   (a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + x + 1.$

   (b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \sin x.$

   (c) $h : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1],\ x \mapsto \sin x.$

4. Betrachten Sie die Menge K der Kreise in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$. Ein Kreis entspricht der Menge seiner Punkte. Also ist ein Element $c \in K$ eine Teilmenge der Ebene: $c \subset \mathbb{R}^2$. Wir lassen den Radius Null zu, also $\{x\} \in K, \forall x \in \mathbb{R}^2$.

   Finden Sie ein logisches Prädikat $A(c)$, welches genau dann wahr ist, wenn c ein Element von K ist.

   Wir betrachten die Abbildungen

$$
\begin{aligned}
r &: K \longrightarrow \mathbb{R}, \\
u &: K \longrightarrow \mathbb{R}, \\
a &: K \longrightarrow \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

   welche einem Kreis $c \in K$ jeweils seinen Radius $r(c)$, seinen Umfang $u(c)$ und seine Fläche $a(c)$ zuordnen.

   (a) Welche der obigen drei Funktionen ist injektiv?

   (b) Welche der obigen drei Funktionen ist surjektiv?

   (c) Bestimmen Sie die Bilder von r, u und a, also die Mengen $r(K), u(K)$ und $a(K)$.

5. (a) Seien X, Y Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion. Es bezeichne $G_f = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = y\}$ den Graphen von f. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$
\begin{aligned}
p : G_f &\longrightarrow X \\
(x, y) &\mapsto x
\end{aligned}
$$

   eine Bijektion ist.

   (b) Zeigen Sie die komplementäre Aussage zum ersten Teil der Aufgabe. Also: Seien X, Y Mengen, $G \subset X \times Y$, sodass

$$
\begin{aligned}
p : G &\longrightarrow X \\
(x, y) &\mapsto x
\end{aligned}
$$

   eine Bijektion ist. Zeigen Sie, dass es eine Funktion $f : X \longrightarrow Y$ gibt, sodass G der Graph von f ist.

6. **Multiple Choice Aufgaben:**

Bei einigen Aufgaben können auch mehrere Antworten richtig sein. Eine Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet.
Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe "Weiss ich nicht." So erhalten wir eine bessere Rückmeldung.

1. Welche der folgenden Funktionen ist injektiv, aber nicht surjektiv? Im folgenden bezeichnet $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen.

(a) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

(b) $\mathbb{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$.

(c) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}, x \mapsto x^2$.

(d) $R_{\geqslant 0} \longrightarrow R_{\geqslant 0}, x \mapsto x^2$.

(e) Keine.

2. Betrachten Sie die trigonometrischen Funktionen $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Seien $X_0 = \{0, \pi/2\}$ und $X = X_0 \cup \{-\pi/2\}$. Welche der folgenden Mengen entspricht $\sin(X_0)$?

(a) $\{0, 1\}$.

(b) $\{0, 1, -1\}$.

(c) $\{\{0\}, \{1\}\}$.

(d) Keine.

3. Betrachten Sie die trigonometrischen Funktionen $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Seien $X_0 = \{0, \pi/2\}$ und $X = X_0 \cup \{-\pi/2\}$. Welche der folgenden Mengen entspricht $\sin(X)$?

(a) $\sin(X_0)$

(b) $\{0, 1\}$.

(c) $\{0, 1, -1\}$.

(d) $\{\{0\}, \{1\}\}$.

(e) Keine.

4. Betrachten Sie die trigonometrischen Funktionen $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Seien $X_0 = \{0, \pi/2\}$ und $X = X_0 \cup \{-\pi/2\}$. Welche der folgenden Mengen entspricht $\cos(X_0)$?

(a) $\{0, 1\}$.

(b) $\{0, 1, -1\}$.

(c) $\{\{0\}, \{1\}\}$.

(d) Keine.

5. Betrachten Sie die trigonometrischen Funktionen $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Seien $X_0 = \{0, \pi/2\}$ und $X = X_0 \cup \{-\pi/2\}$. Welche der folgenden Mengen entspricht $\cos(X)$?

(a) $\cos(X_0)$.

(b) $\{0, 1\}$.

(c) $\{0, 1, -1\}$.

(d) $\{\{0\}, \{1\}\}$.

(e) Keine.

6. Betrachten Sie die trigonometrische Funktion $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Welche Menge ist $\cos^{-1}(\{0\})$?

(a) $\{\pi/2\}$.

(b) $\{-\pi/2, +\pi/2\}$.

(c) $\{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) $\{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{N}_0\}$.

(e) Keine.

Abgabe: Freitag, den 4. Oktober 2013.