Serie 3

1. Geben Sie eine Bijektion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ an.

2. Auf der Menge der reellen Zahlen definieren wir die folgende Relation.

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}\,.$$

   (a) Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation definiert.

   (b) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl zu genau einer reellen Zahl im Intervall $[0, 1[$ äquivalent ist.

3. Auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen sei die Relation $\mid$ wie folgt definiert: Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei

$$m \mid n \Leftrightarrow \exists\, l \in \mathbb{N} \ : \ n = lm.$$

   (a) Zeigen Sie, dass $\mid$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ definiert.

   (b) Betrachten Sie die Menge $5\,\mathbb{N} := \{5p|p \in \mathbb{N}\}$.

      i. Besitzt diese Menge eine obere Schranke?

      ii. Besitzt diese Menge eine untere Schranke?

      iii. Besitzt diese Menge ein Minimum?

   (c) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}, |)$ nicht total geordnet ist.

   (d) Finden Sie eine total geordnete Teilmenge $T \subset \mathbb{N}$ mit unendlich vielen Elementen.

4. Es bezeichne $X = \{(i, j) : i, j \in \{1, \ldots, 8\}\}$ die Menge der Felder eines Schachbrettes. Hierauf definieren wir die Relation $\sim$, wobei $a \sim b$ genau dann gelten soll, wenn ein Springer auf Feld a auf einem sonst leeren Schachbrett das Feld b in endlich vielen Zügen erreichen kann.

   (a) Zeigen Sie, dass $(1, 1) \sim (3, 1)$

   (b) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

   (c) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen von $\sim$ (schwer).

5. Das Auswahlaxiom ist definiert als:

$$\begin{aligned} &\forall\, X \neq \emptyset\ \exists\, f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow X \text{ sodass} \\ &\qquad\qquad \forall\, A \in \mathcal{P}(X) :\ A \neq \emptyset \Rightarrow f(A) \in A. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom zur folgenden Aussage äquivalent ist:

$$\begin{aligned} &\forall\, I \text{ Menge}\ \forall\, Z \neq \emptyset\ \forall\, f : I \longrightarrow \mathcal{P}(Z) \setminus \{\emptyset\} \quad \exists\, g : I \longrightarrow Z \text{ sodass} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \forall x \in I : g(x) \in f(x). \end{aligned}$$

6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Leiten Sie die folgenden Aussagen aus den Axiomen der rellen Zahlen ab:

   (a) $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

   (b) $0 < a < b \Rightarrow \frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$.

7. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie

   (a) $2ab \leqslant a^2 + b^2$.

   (b) Sei $\epsilon > 0$. Es gilt: $ab \leqslant \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2$. *Hinweis: Verwenden Sie (a).*

8. **Multiple Choice Aufgaben:**

Bei einigen Aufgaben können auch mehrere Antworten richtig sein. Eine Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet.
Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe "Weiss ich nicht." So erhalten wir eine bessere Rückmeldung.

1. Betrachten Sie $\mathbb{N}$ mit der üblichen Ordnung $\leqslant$. Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Was stimmt?

(a) A hat eine obere Schranke.

(b) A hat eine eindeutige obere Schranke.

(c) A hat eine untere Schranke.

(d) A hat eine eindeutige untere Schranke.

(e) A hat ein Minimum.

(f) Keine Aussage stimmt.

2. Betrachte die Menge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit der Ordungsrelation, die durch die Inklusion von Mengen definiert ist. Seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{4, 5, 6\}$. Was ist eine obere Schranke von $\{A, B\}$?

(a) $\{7, 8, 9, 10, \ldots\}$.

(b) $A \cup B$.

(c) $\mathbb{N}$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

3. Sei X die Menge der Städte auf der Erde. Definiere auf X die Relation

$$xRy \Leftrightarrow x \text{ ist von } y \text{ aus auf dem Landweg erreichbar.}$$

Diese Relation ist

(a) eine Ordnungsrelation.

(b) eine Äquivalenzrelation.

(c) Weder eine Ordnungs- noch eine Äquivalenzrelation.

4. Sei auf $\mathbb{Z}$ die folgende Relation definiert. Für $x, y \in \mathbb{Z}$ sei

$$xRy \Leftrightarrow x(1-x) = y(1-y).$$

Was ist die Äquivalenzklasse $[3]_R$?

(a) $\{3\}$.

(b) $\{3, -2\}$.

(c) $\emptyset$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Abgabe: Freitag, den 11. Oktober 2013 in der Übungsstunde oder vorher in den Fächern.