Serie 4

1. Betrachten Sie die Menge

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Wir definieren auf $\mathbb{R}^n$ die Relation $<$ wie folgt. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gelte $x < y$ genau dann, wenn

$$\exists\, j \in \{1, \ldots, n\} \quad (x_j < y_j) \wedge \\ \forall\, i \in \mathbb{N}\, (i < j \to x_i = y_i).$$

Die Relation $\leqslant$ auf $\mathbb{R}^n$ sei für $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$x \leqslant y \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y).$$

Sie definiert auf $\mathbb{R}^n$ die sogenannte Lexikographische Ordnung.

(a) Zeigen Sie, dass $\leqslant$ auf $\mathbb{R}^n$ eine Ordnungsrelation definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, \leqslant)$ total geordnet ist.

2. Die Fibonacci Zahlen sind rekursiv definiert via $a_0 = a_1 = 1$ und

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\,.$$

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiere das Prädikat $P(n)$ durch

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \;\wedge\; a_{n+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

Beweisen Sie $\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : (P(n) \to P(n+1))$. Gilt $\forall\, n \in \mathbb{N}_0 : P(n)$?

(b) Zeigen Sie mittels Induktion die explizite Darstellung

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}\; 2^{n+1}} \left((1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0\,.$$

3. Zeigen Sie die Existenz von $\sqrt{2}$ also, dass $\exists\, b \in \mathbb{R},\ b \geqslant 0,\ b^2 = 2$. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

(a) Definieren Sie $Y = \{a \in \mathbb{R} : a \geqslant 0, a^2 \geqslant 2\}$.

(b) Zeigen Sie, dass $b := \inf Y$ existiert.

(c) Zeigen Sie, dass $b \geqslant 0$ und $b^2 = 2$.
Hinweis: Es gilt $b^2 > 2 \vee b^2 = 2 \vee b^2 < 2$. Betrachten Sie die Grössen $a = \frac{1}{2}(1 - \frac{2}{b^2}), a' = \frac{1}{2}(1 - \frac{b^2}{2})$ und die davon abgeleiteten Grössen $b(1-a)$ und $\frac{b}{1-a'}$.

4. Nun, da wir wissen, dass $\sqrt{2}$ existiert, wollen wir beweisen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. Sei

$$\mathbb{Q}_{\geqslant 0} = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{N}_0 \,\text{koprim}, b \neq 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$.

5. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer und beschränkt. Definieren Sie

$$\begin{aligned} Q(A, B) &= \sup\{\inf\{|x-y|, y \in A\}, x \in B\}, \\ P(A, B) &= \max\{Q(A, B), Q(B, A)\}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie $P(\{\frac{1}{2}\}, [0,1])$ und $P([0,1], [0,2])$.

6. Für $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkt und nichtleer definieren Sie

$$A + B = \{c \in \mathbb{R} : \exists\, a \in A, b \in B : c = a + b\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

7. Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer und beschränkt. Zeigen Sie
   (a) $A \subset B$ impliziert $\sup A \leqslant \sup B$ und $\inf B \leqslant \inf A$.
   (b) $\forall\, a \in A\, \forall\, b \in B : a \leqslant b$ impliziert $\sup A \leqslant \inf B$.

8. Sei $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Definieren Sie

$$D(x, A) = \inf\{|x - a|, a \in A\}.$$

Berechnen Sie $D(\frac{1}{2}, [1,2])$ und $D(\frac{1}{2}, [0,1])$.
Beweisen oder widerlegen Sie:
   (a) $x \in A \to D(x, A) = 0$.
   (b) $D(x, A) = 0 \to x \in A$.
   (c) $\forall\, x \in [0,1]\ D(x, \mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$.
   (d) $D(x, A) \leqslant p$ und $|x - y| \leqslant q$ implizieren zusammen $D(y, A) \leqslant p + q$.
   (e) $D(x, A) \leqslant p$ und $D(y, A) \leqslant q$ implizieren zusammen $|x - y| \leqslant p + q$.

9. **Multiple Choice Aufgaben:**

Bei einigen Aufgaben können auch mehrere Antworten richtig sein. Eine Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet.
Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe "Weiss ich nicht." So erhalten wir eine bessere Rückmeldung.

1. Seien $x, y > 0$ und $z \in \mathbb{R}$. Welche Implikationen sind richtig?

(a) $x > y \Rightarrow x + z > y + z.$

(b) $x > y \Rightarrow x + z \geqslant y + z.$

(c) $x > y \Rightarrow xz > yz.$

(d) $x > y \Rightarrow xz \geqslant yz.$

(e) $x \geqslant y \Rightarrow xz \geqslant yz.$

(f) Keine.

2. Gilt $\sup([0,1[\cup\{3/2\}) = \sup([0,1] \cup \{3/2\})$?

(a) Ja.

(b) Nein.

(c) Weiss ich nicht.

3. Gilt $\sup[-1,0[= \inf[0,1]$?

(a) Ja.

(b) Nein.

(c) Weiss ich nicht.

4. Was ist $\sup\{\sup\{x \in]0, \frac{1}{n}[\}, n \in \mathbb{N}\}$?

(a) 1

(b) 0

(c) Keine der Antworten ist richtig.

5. Existiert $\max\{\sup\{x \in]0, \frac{1}{n}[\}, n \in \mathbb{N}\}$?

(a) Ja.

(b) Nein.

(c) Weiss ich nicht.

Abgabe: Freitag, den 18. Oktober 2013 in der Übungsstunde oder vorher in den Fächern.