MATH, PHYS, CHAB | Analysis I | HS 2013
Prof. Dr. E. Kowalski

Serie 5

1. Seien X, Y Mengen mit endlich vielen Elementen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Wir bezeichnen mit $|X|$ und $|Y|$ die Anzahl der Elemente der Mengen X und Y.

   (a) Gelte $|X| > |Y|$. Beweisen Sie das sogenannte Schubfachprinzip: f ist nicht injektiv.

   (b) Gelte nun $|X| = |Y|$. Beweisen Sie, dass
   $$f \text{ surjektiv } \Leftrightarrow f \text{ injektiv } \Leftrightarrow f \text{ bijektiv.}$$

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $S \subset \{1, \ldots, 2n\}$. Wir sagen, dass eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ eine Zahl $b \in \mathbb{N}$ *teilt*, geschrieben $a|b$ wenn $\exists\, l \in \mathbb{N} : b = al$.

   (a) Nehmen Sie an, dass S mehr als n Elemente hat. Zeigen Sie, dass
   $$\exists\, a, b \in S, a \neq b,\ a|b.$$
   Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $C_a := \{2^k a : k \in \mathbb{N}_0, 2^k a \leqslant 2n\}$ für $a \in \{1, \ldots, 2n\}$ ungerade. Zeigen Sie, dass jedes $b \in \{1, \ldots, 2n\}$ in genau einer dieser Mengen C_a liegt und wenden Sie das Schubfachprinzip aus Aufgabe 1 an.

   (b) Gibt es eine Teilmenge von $\{1, \ldots, 2n\}$ mit n Elementen, unter denen es keine zwei Elemente gibt, die einander teilen?

3. Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Teilmenge mit mehr als einem Element. Zeigen Sie, dass
   $$I \text{ intervall} \Leftrightarrow \forall\, x, y \in I, x \neq y : [x, y] \subset I.$$
   Hinweis für "$\Leftarrow$": Zeigen Sie $]\inf I, \sup I[\subset I$.

4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Element. Wir wollen zeigen, dass es eine Bijektion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt.

   (a) Betrachten Sie zunächst die Fälle
   $$\begin{aligned} I_1 &=]-\pi/2, \pi/2[, \\ I_2 &=]-\pi/2, \pi/2], \\ I_3 &= [-\pi/2, \pi/2[, \\ I_4 &= [-\pi/2, \pi/2]. \end{aligned}$$

   (b) Betrachten Sie nun den allgemeinen Fall.

   Hinweise: Betrachten Sie trigonometrische Funktionen und verwenden Sie, dass die Komposition von Bijektionen wiederum bijektiv ist. Aufgabe 1 aus Serie 3 kann auch hilfreich sein.

5. Seien (u_n) und (v_n) konvergente reelle Folgen mit

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u, \\ v_n &\longrightarrow v. \end{aligned}$$

Zeigen Sie

(a) $u_n + v_n \longrightarrow u + v$ und

(b) $u_n v_n \longrightarrow uv$.

6. (a) Sei (a_n) eine konvergente reelle Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass die Folge der arithmetischen Mittel

$$s_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

der ersten n Folgenglieder auch gegen a konvergiert.
Hinweis: Betrachten Sie die Menge $\{|a_k - a|, k \in \mathbb{N}\}$.

(b) Finden Sie eine divergente Folge (b_n), sodass

$$s_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i$$

konvergiert.

7. **Multiple Choice Aufgaben:**

Bei einigen Aufgaben können auch mehrere Antworten richtig sein. Eine Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet.

Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe "Weiss ich nicht." So erhalten wir eine bessere Rückmeldung.

1. Welche Antwort stimmt für $a_n = \frac{n+1}{n}$?

(a) $a_n \longrightarrow n, \quad$ für $n \longrightarrow \infty$.

(b) $a_n \longrightarrow 1, \quad$ für $n \longrightarrow \infty$.

(c) $a_n \longrightarrow 0, \quad$ für $n \longrightarrow \infty$.

(d) Die Folge ist divergent.

(e) Keine.

2. Welche Antwort stimmt für $a_n = 1$?

(a) $a_n \longrightarrow 1, \quad$ für $n \longrightarrow \infty$.

(b) $a_n \longrightarrow 0, \quad$ für $n \longrightarrow \infty$.

(c) Die Folge ist divergent.

(d) Keine.

3. Welche Antwort stimmt für $a_n = (-1)^n$?

(a) Die Folge ist beschränkt.

(b) Die Folge konvergiert.

(c) Die Folge divergiert.

(d) $a_n \longrightarrow (-1), \quad$ für $n \longrightarrow \infty$.

(e) $a_n \longrightarrow (-1)^n, \quad$ für $n \longrightarrow \infty$.

(f) Keine.

4. Welche Antwort stimmt für $a_n = \frac{1}{n}(-1)^n$?

(a) Die Folge ist beschränkt.

(b) Die Folge konvergiert.

(c) Die Folge divergiert.

(d) $a_n \longrightarrow (-1), \quad$ für $n \longrightarrow \infty$.

(e) $a_n \longrightarrow 0, \quad$ für $n \longrightarrow \infty$.

(f) Keine.

5. Welche Antwort stimmt für $a_n = \sin \frac{1}{n}$?

(a) Die Folge ist beschränkt.

(b) Die Folge konvergiert.

(c) Die Folge divergiert.

(d) $a_n \longrightarrow \sin 1, \quad$ für $n \longrightarrow \infty$.

(e) $a_n \longrightarrow \sin 0, \quad$ für $n \longrightarrow \infty$.

(f) $a_n \longrightarrow 0, \quad$ für $n \longrightarrow \infty$.

(g) Keine.

6. Nehmen Sie an, dass a_n gegen a konvergiert und $b_n := a_{2n}$. Was gilt nun im Limes $n \longrightarrow \infty$?

(a) $a_n + 1 \longrightarrow a + 1$.

(b) $a_{n+1} \longrightarrow a + 1$.

(c) b_n ist konvergent.

(d) $b_n \longrightarrow 2a$.

(e) $b_n \longrightarrow a$.

(f) Keine der obigen Antworten.

Abgabe: Freitag, den 25. Oktober 2013 in der Übungsstunde oder vorher in den Fächern.