Serie 6

1. Sei u_n eine reelle Folge, die gegen $u \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass alle Teilfolgen von u_n auch gegen u konvergieren, also: Für alle Folgen $m_k \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ von natürlichen Zahlen mit $m_{k+1} > m_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt

$$v_k := u_{m_k} \longrightarrow u, \quad \text{für } k \longrightarrow \infty.$$

Hinweis: Zeigen Sie $m_k \geqslant k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

2. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass die Folge $a_n := (1 + 1/n)^n$ konvergiert. Ihren Limes bezeichnet man als die Eulersche Zahl e. Gehen Sie wie folgt vor:

   (a) Zeigen Sie, dass die Folge a_n monoton wachsend ist. Verwenden Sie die Bernoulli-Ungleichung, die besagt, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $x \geqslant -1$ die Abschätzung $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass die Folge a_n beschränkt ist. Definieren Sie dazu die Folge $b_n := (1 + 1/n)^{n+1}$ und zeigen Sie, dass b_n monoton fällt.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Für beliebige reelle Zahlen a_k und b_k gelten

   (a) $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$,

   (b) $\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}(b_{k+1} - b_k) = a_{n+1}b_{n+1} - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n} b_k(a_{k+1} - a_k)$.

4. Berechnen Sie $\sum_{m=0}^{k} \sum_{n=0}^{k} |m - n|$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Es gilt

   - $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n + 1)$.
   - $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$.

5. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, welche gegen Null konvergiert, und mit

$$u_{n+1} \leqslant u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$u_n \geqslant 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Definieren Sie

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k.$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k$ konvergiert, also dass die Folge der s_n konvergiert.
   Hinweise: Definieren Sie die Folgen $r_n := s_{2n+1}$ und $q_n := s_{2n}$. Zeigen Sie zunächst, dass r_n konvergiert. Zeigen Sie dann, dass q_n zum gleichen Grenzwert konvergiert.

   (b) Nehmen Sie an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ divergiert. Konvergiert dann die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k$ absolut?

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert.

(d) Finden Sie eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\phi(n)} \frac{1}{\phi(n)}$$

nicht gegen $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert.
Hinweis: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = \ln \frac{1}{2}$.

6. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Folge der H_n unbeschränkt wächst. Zeigen Sie:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $H_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} H_k$.
Hinweis: Verwenden Sie partielle Summation.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{H_1+H_2+\ldots+H_n}{nH_n} = 1$.

(c) $\forall m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $-1 \leq H_{mn} - H_m - H_n \leq 0$.
Hinweis: Definieren Sie $f(m,n) = H_{mn} - H_m - H_n$ und zeigen Sie

- $0 \leqslant f(m+1,n) - f(m,n) \leqslant \frac{1}{m(m+1)}$.
- $f(m+1,n) - f(1,n) = \sum_{k=1}^{m}(f(k+1,n) - f(k,n))$.
- $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{m+1}$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{H_{n!}}{nH_n} = 1$.

7. **Multiple Choice Aufgaben:**

Bei einigen Aufgaben können auch mehrere Antworten richtig sein. Eine Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet.
Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe "Weiss ich nicht." So erhalten wir eine bessere Rückmeldung.

1. Es gilt, dass $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ nicht absolut konvergiert. Kann man daraus ableiten, dass $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nicht absolut konvergiert?

(a) Ja.

(b) Nein.

(c) Weiss nicht.

2. Betrachte die Folge

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Welche Aussage stimmt?

(a) Die Folge hat einen Häufungspunkt.

(b) Die Folge hat keinen Häufungspunkt.

(c) Die Folge konvergiert.

(d) Die Folge hat eine konvergente Teilfolge.

(e) Die Folge hat zwei verschiedene konvergente Teilfolgen.

(f) Die Folge ist nach unten beschränkt.

(g) Die Folge ist beschränkt.

(h) Weiss nicht.

3. Was sagt das d'Alembert Kriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{k\geqslant 1} 1$ aus?

(a) "Die Reihe divergiert."

(b) "Die Reihe konvergiert."

(c) Nichts.

(d) Weiss nicht.

4. Was sagt das d'Alembert Kriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{1}{n}$ aus?

(a) "Die Reihe konvergiert."

(b) "Die Reihe divergiert"

(c) Nichts.

(d) Weiss nicht.

5. Sei $0 \leqslant q < 1$. Was sagt das d'Alembert Kriterium über die Konvergenz der Reihe $\sum_{n\geqslant 1} n^{1000} q^n$ aus?

(a) "Die Reihe konvergiert."

(b) "Die Reihe divergiert"

(c) Nichts.

(d) Weiss nicht.

Abgabe: Freitag, den 1. November 2013 in der Übungsstunde oder vorher in den Fächern.