Serie 7

1. Die Riemannsche Zeta-Funktion ist definiert als

$$\zeta(k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k},$$

wo $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$ ist. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = 1.$$

Hinweise: Zeigen und verwenden Sie die folgenden zwei Identitäten:

- $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$.

2. Sei u_n eine reelle Folge, $u_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} & u_n \longrightarrow +\infty \quad (n \longrightarrow +\infty) \\ \Leftrightarrow & \left((\exists\, n_0 \;\forall\, n \geqslant n_0 : u_n > 0) \wedge \left(\frac{1}{u_n} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow +\infty) \right) \right). \end{aligned}$$

3. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass 0 die einzige Stelle ist, an der f stetig ist.

4. Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ und $f := \chi_E : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ die zugehörige charakteristische Funktion. Unter welchen Bedingungen an ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist f bei x_0 stetig? *Hinweis:* Unterscheiden Sie $x_0 \in E$ und $x_0 \notin E$.

5. Wir nennen $E \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, wenn $\mathbb{R}^n \setminus E$ offen ist.

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn gilt

$$\forall\, U \subset \mathbb{R}^m : U \text{ abgeschlossen } \Rightarrow \underline{f}^{-1}(U) \text{ abgeschlossen}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die folgende Charakterisierung von Stetigkeit. Die Funktion f ist genau dann bei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ stetig, wenn für alle Umgebungen V von $f(x_0)$ die Menge $\underline{f}^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0 ist.

6. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

nicht stetig ist.

7. Sei $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(x) = f(2x), \quad \forall\, x > 0.$$

Zeigen Sie:

(a) f ist genau dann stetig, wenn f konstant ist.

(b) f muss im Allgemeinen nicht konstant sein.
Hinweis: Für alle positiven reellen Zahlen x gibt es genau eine reelle Zahl $y \in [1, 2[$ mit $\frac{x}{y} = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

8. **Multiple Choice Aufgaben:**

Bei einigen Aufgaben können auch mehrere Antworten richtig sein. Eine Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet.
Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht und wählen Sie bei der Eingabe "Weiss ich nicht." So erhalten wir eine bessere Rückmeldung.

1. Welche der folgenden Mengen ist eine Umgebung von 0 in $\mathbb{R}$?

(a) $\{0\}$.

(b) $]-1,1[$.

(c) $[-1,1]$.

(d) $[0,1]$.

(e) $]0,1[$.

2. Welche der folgenden Mengen ist eine Umgebung von 0 in $]-1,1[$?

(a) $\{0\}$.

(b) $]-1,1[$.

(c) $[-1,1]$.

(d) $[0,1]$.

(e) $]0,1[$.

3. Welche der folgenden Mengen ist eine Umgebung von 0 in $[0,1]$?

(a) $\{0\}$.

(b) $]-1,1[$.

(c) $[-1,1]$.

(d) $[0,1]$.

(e) $]0,1[$.

4. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, u_n eine reelle Folge mit $u_n \longrightarrow a$, $u_n \neq a \; \forall \, n \in \mathbb{N}$. Wir können auf $f(u_n) \longrightarrow f(a)$ folgern falls

(a) f konstant ist.

(b) f linear ist.

(c) f stetig bei u_1.

(d) f stetig bei u_n für alle $n \in \mathbb{N}$.

(e) f stetig bei a.

(f) f stetig bei a und nicht stetig bei allen u_n, $n \in \mathbb{N}$.

Abgabe: Freitag, den 8. November 2013 in der Übungsstunde oder vorher in den Fächern.