Serie 8

1. Sei $E \subset \mathbb{R}^k$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^k$. Nehmen Sie an, dass zwar $x_0 \notin E$, aber

$$y_0 := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x)$$

existiert. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : E \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ y_0, & x = x_0, \end{cases}$$

bei x_0 stetig ist.

2. Es bezeichne $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ den Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$. Definieren Sie

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[&\longrightarrow C \\ \theta &\longmapsto (\cos\theta, \sin\theta). \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass f stetig und bijektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Inverse f^{-1} von f *nicht* stetig ist.

Hinweis: Es darf angenommen werden, dass sin, cos stetig sind und Inverse $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2], \arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ besitzen.

3. Wählen Sie eine Abstandsfunktion $h \in \{d_1, d_2, d_\infty\}$ auf $\mathbb{R}^k$.

(a) Zeigen Sie, dass $h : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.
Hinweis: Identifizieren Sie $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{2k}$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto h(x, y - x)^2 + 1 \end{aligned}$$

stetig ist.

(c) Sei nun $k = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto h(x^3 + 1, x^2 + y^2 - 1) \end{aligned}$$

stetig ist.

4. Sei $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{T}$.

- Für alle Familien $\{U_i\}_{i\in I}$ von offenen Mengen $U_i \in \mathcal{T}$ gilt

$$\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}.$$

- Für alle *endlichen* Familien $\{U_i\}_{i\in I}$, also wo I endliche Menge ist, von offenen Mengen $U_i \in \mathcal{T}$ gilt

$$\bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}.$$

Man sagt, dass die offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ eine *Topologie* auf $\mathbb{R}^n$ definieren.

(b) Zeigen Sie, dass beliebige Durchschnitte von offenen Mengen, nicht offen sein müssen.

5. Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^n . \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f ist wohldefiniert.

(b) Die Funktion f ist stetig.

6. Sei $E \subset \mathbb{R}^k, f : E \longrightarrow E$ eine stetige Abbildung. Sei $x_0 \in E$ und die Folge x_n rekursiv definiert via

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

Zeigen Sie:

(a) Falls die x_n gegen einen Punkt $a \in E$ konvergieren, dann ist a ein Fixpunkt von f, also $f(a) = a$.

(b) Die Folge der x_n muss nicht notwendigerweise konvergieren.

7. **Multiple Choice Aufgaben:**

1. Was ist $\lim_{n\to+\infty} \exp^{1/n}$?

(a) 1.

(b) 0.

(c) Der Limes existiert nicht.

2. Es sei $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Heaviside-Funktion mit $H(0) = 1$. Es sei $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$. Was gilt?

(a) $H \circ H$ ist stetig.

(b) $H \cdot H$ ist stetig.

(c) $F \circ H$ ist stetig.

(d) $H \circ F$ ist stetig.

(e) $F \circ F$ ist stetig.

3. Gilt $\overline{z^2} = \overline{z}^2$?

(a) Ja.

(b) Nein.

4. Gilt $\overline{-z} = -\overline{z}$?

(a) Ja.

(b) Nein.

5. Was ist $\overline{i}$?

(a) $-i$.

(b) 0.

(c) 1.

6. Was ist der Realteil von $e^{\pi/2}$?

(a) 0.

(b) 1.

(c) $e^{\pi/2}$.

7. Was ist der Imaginärteil von $i \in \mathbb{C}$?

(a) 1.

(b) i.

8. Sei x der Realteil von $z \in \mathbb{C}$. Ist der Realteil von z^2 gleich x^2?

(a) Ja.

(b) Nein.

Abgabe: Freitag, den 15. November 2013 in der Übungsstunde oder vorher in den Fächern.