Serie 9

1. In der Vorlesung wurde die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ via

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

eingefürt. Es wurde gezeigt, dass diese Potenzreihe auf ganz $\mathbb{C}$ absolut konvergiert und dass exp stetig ist. Weiterhin sind die trigonometrischen Funktionen $\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ und $\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert über die Gleichungen

$$\sin(z) := \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)),$$
$$\cos(z) := \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Reihendarstellungen

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},$$
$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten, wobei die Reihen auf ganz $\mathbb{C}$ absolut konvergieren.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x$$

gilt. Um was für eine Zerlegung handelt es sich hier?

(c) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$
$$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

(d) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzungen

$$|\sin x| \leqslant 1,$$
$$|\cos x| \leqslant 1$$

aus obiger Definition direkt ableitbar sind.

2. Die Funktionen exp und cos seien wie in Aufgabe 1 definiert. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$. Zeigen Sie

$$\sum_{m=0}^{\infty} \exp(-ma)\cos(mb) = \frac{1 - \exp(-a)\cos b}{1 - 2\exp(-a)\cos b + \exp(-2a)}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

3. Sei (x_n) eine Folge im $\mathbb{R}^k$. Wir nennen (x_n) eine *Cauchy-Folge* falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall m, n \geqslant n_0 \; d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

   Zeigen Sie, dass jede Cauchy-Folge im $\mathbb{R}^k$ konvergiert.
   Hinweis: Verwenden Sie, dass jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

4. (a) Sei $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig, $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Muss es dann ein $x \in [-1, 1]$ geben mit $f(x) = 0$?
   (b) Zeigen Sie: Ein reelles Polynom $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ungeraden* Grades ist surjektiv.

5. Sei $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\phi(0) = \phi(1)$. Ferner sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeigen Sie, dass es dann einen Punkt x_n im Intervall $[0, 1]$ gibt mit $\phi(x_n) = \phi(x_n + \frac{1}{n})$.
   Hinweis: Betrachten Sie $\sum_{k=0}^{n-1} (\phi(k/n) - \phi(k/n + 1/n))$.

6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Definiere die Funktionen

$$m : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad M : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$m(x) := \min\{f(t) : a \leqslant t \leqslant x\} \qquad\qquad M(x) := \max\{f(t) : a \leqslant t \leqslant x\}$$

   (a) Zeigen Sie, dass beide Funktionen m, M wohldefiniert sind.
   (b) Zeigen Sie, dass beide Funktionen m, M stetig sind. *Hinweis:* Um Stetigkeit von M bei $x_0 \in [a, b]$ zu zeigen, unterscheiden Sie $f(x_0) = M(x_0)$ und $f(x_0) < M(x_0)$.

7. **Multiple Choice Aufgaben:**

1. Die Funktion $]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x$

(a) ist stetig.

(b) ist beschränkt.

(c) nimmt ihr Supremum an.

(d) nimmt ihr Infimum an.

2. Die Funktion $]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x}$

(a) ist stetig.

(b) ist beschränkt.

(c) nimmt ihr Supremum an.

(d) nimmt ihr Infimum an.

3. Die Funktion $[1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x}$

(a) ist stetig.

(b) ist beschränkt.

(c) nimmt ihr Supremum an.

(d) nimmt ihr Infimum an.

4. Die Funktion $[1, \exp(\sin(\sqrt{2}))] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \cos(\frac{1}{2+\sin(3\sqrt{x}-5)})$

(a) ist stetig.

(b) ist beschränkt.

(c) nimmt ihr Supremum an.

(d) nimmt ihr Infimum an.

5. Die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \begin{cases} \exp x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(a) ist stetig.

(b) ist beschränkt.

(c) nimmt ihr Supremum an.

(d) nimmt ihr Infimum an.

6. Die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(a) ist stetig.

(b) ist beschränkt.

(c) nimmt ihr Supremum an.

(d) nimmt ihr Infimum an.

Abgabe: Freitag, den 22. November 2013 in der Übungsstunde oder vorher in den Fächern.