Serie 10

1. Sei $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2=1\}$ der Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} P &:= \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ stetig}, \ f(2\pi + x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}, \\ C(S^1) &:= \{f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ stetig } \}. \end{aligned}$$

Definieren Sie die Abbildungen

$$\begin{aligned} \lambda : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ \theta &\longmapsto (\cos\theta, \sin\theta) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda^* : C(S^1) &\longrightarrow P \\ f &\longmapsto f \circ \lambda. \end{aligned}$$

   (a) Zeigen Sie, dass λ^* wohldefiniert ist.
   Bemerkung: Man nennt $\lambda^* f$ auf deutsch den *pullback* von f durch λ.

   (b) Zeigen Sie, dass λ^* injektiv ist.

   (c) Zeigen Sie, dass λ^* surjektiv ist.
   Hinweis: Verwenden Sie, dass $\lambda\big|_{[0,2\pi[} : [0,2\pi[\to S^1$ stetig ist und eine Inverse $\mu : S^1 \to [0,2\pi[$ besitzt, welche auf $]0,2\pi[$ stetig ist.

2. Sei $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass es $x_0 \in S^1$ gibt mit

$$f(x_0) = f(-x_0).$$

Hinweis: Definieren Sie $g(x) := f(x) - f(-x)$ und verwenden Sie Aufgabe 1 und den Zwischenwertsatz.

3. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{1+(x-n)^2}$ ...

   (a) ...auf $\mathbb{R}$ punktweise aber nicht gleichmässig konvergiert.

   (b) ...auf jedem Intervall I der Form $I = [a,b] \subset \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert.

4. Definieren Sie $C := C([0,1]) := \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} d : C \times C &\longrightarrow \mathbb{R} \\ d(f,g) &:= \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

   (a) Zeigen Sie, dass d wohldefiniert ist.

   (b) Zeigen Sie, dass d eine *Metrik* auf C definiert, also
      i. Definitheit: $\forall f, g \in C : d(f,g) \geqslant 0$ und $\forall f, g \in C : (d(f,g) = 0 \leftrightarrow f = g)$
      ii. Symmetrie: $\forall f, g \in C : d(f,g) = d(g,f)$
      iii. Dreiecksungleichung: $\forall f, g, h \in C : d(f,h) \leqslant d(f,g) + d(g,h)$.

   (c) Zeigen Sie, dass eine Folge $f_n \in C$ genau dann gleichmässig gegen $f \in C$ konvergiert, wenn $d(f_n, f)$ gegen Null konvergiert.

5. Für $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ definieren wir $a^x := \exp(x \log a)$. Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

   (a) $a^{\frac{1}{k}}$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung $x^k = a$ auf $]0, +\infty[$.

   (b) Die Funktion

   $$\begin{aligned}]0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto a^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

   ist stetig.

   (c) $\lim_{\substack{a \to 0 \\ a > 0}} a^{\frac{1}{k}} = 0$.

6. Wir verwenden die Notation der vorigen Aufgabe. Zeigen Sie: Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^a} = +\infty.$$

7. **Multiple Choice Aufgaben:**

1. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Gilt folgende Aussage?

$$(f(0) \neq 0) \to \big(\exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x| < \delta \to f(x) \neq 0\big)$$

(a) Ja.

(b) Nein.

2. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Gilt folgende Aussage?

$$(f(0) > 0) \to \big(\exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x| < \delta \to f(x) \neq 0\big)$$

(a) Ja.

(b) Nein.

3. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Gilt folgende Aussage?

$$(f(0) \neq 0) \to \big(\exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x| < \delta \to f(x) > 0\big)$$

(a) Ja.

(b) Nein.

4. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Gilt folgende Aussage?

$$(f(0) \neq 0) \to \Big(\big(\exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x| < \delta \to f(x) > 0\big) \vee \\ \big(\exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : |x| < \delta \to f(x) < 0\big)\Big)$$

(a) Ja.

(b) Nein.

5. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Gilt folgende Aussage?

$$\big(\exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : |x| < \delta \to f(x) \neq 0\big) \to (f(0) \neq 0)$$

(a) Ja.

(b) Nein.

6. Sei I ein beschränktes Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Nehmen Sie an, dass die Funktion f ihr Maximum auf I annimmt. Was stimmt nun?

(a) f ist beschränkt.

(b) f^2 ist beschränkt.

(c) $\sup_{x \in I} f(x)$ ist endlich.

(d) f nimmt ihr Minimum an.

Abgabe: Freitag, den 29. November 2013 in der Übungsstunde oder vorher in den Fächern.