Serie 11

1. Wir definieren $e := \exp(1)$. Zeigen Sie, dass $2 < e < 3$.
   Hinweis: Betrachten Sie die alternierende Reihe $\frac{1}{e} = \exp(-1)$.

2. Sei

$$\begin{aligned} J_0 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

   Man nennt J_0 die Bessel-Funktion der Ordnung null. Aus Serie 8 wissen wir, dass J_0 stetig ist.

   (a) Zeigen Sie, dass J_0 auch differenzierbar ist und die Differentialgleichung

$$x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   erfüllt.

   (b) Zeigen Sie, dass J_0 eine Nullstelle im Intervall $[0, 3]$ besitzt.
   Hinweis: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz. Bei dieser Aufgabe könnte ein Computerprogramm das Bruchrechnen vereinfachen.

3. Eine Funktion $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ heisst *gleichmässig stetig* falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1 \in I \forall x_2 \in I : \big((|x_1 - x_2| < \delta) \to (|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon\big).$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

   nicht gleichmässig stetig ist.
   Hinweis: Betrachten Sie Punkte der Form $\sqrt{n}$ und $\sqrt{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Sei $I = [a, b]$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall. Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass f gleichmässig stetig ist. *Hinweis:* Versuchen Sie einen Widerspruchsbeweis und verwenden Sie den Satz von Bolzano-Weierstrass.

4. Zeigen Sie, dass die folgenden reellwertigen Funktionen differenzierbar sind und berechnen Sie ihre Ableitung.

   (a) $f(x) := \sin x^2,\ x \in \mathbb{R}$
   (b) $g(x) := 2 \sin x \cos x,\ x \in \mathbb{R}$.
   (c) $h(x) := e^{\cos e^x},\ x \in \mathbb{R}$.
   (d) $i(x) := \sin(ax + t),\ x \in \mathbb{R}$, wo $a, t \in \mathbb{R}$.
   (e) $j(x) := e^{x^2+x+1},\ x \in \mathbb{R}$.
   (f) $k(x) := j'(x),\ x \in \mathbb{R}$.

5. **Multiple Choice Aufgaben:**

1. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ist f dann differenzierbar?

(a) Ja.

(b) Nein.

2. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gleichmässig stetig. Ist f dann differenzierbar?

(a) Ja.

(b) Nein.

3. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist dann f stetig?

(a) Ja.

(b) Nein.

4. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist dann f gleichmässig stetig?

(a) Ja.

(b) Nein.

5. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $|f(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folgt dann $|f'(x)| \leqslant 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

(a) Ja.

(b) Nein.

6. Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Folgt dann, dass $(fg)' = f'g'$?

(a) Ja.

(b) Nein.

7. Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, sodass $f \circ g$ differenzierbar ist. Ist dann (mindestens) eine der beiden Funktionen f, g notwendigerweise differenzierbar?

(a) Ja.

(b) Nein.

Abgabe: Freitag, den 6. Dezember 2013 in der Übungsstunde oder vorher in den Fächern.