Serie 12

1. Bestimmen Sie, dass die folgenden Funktionen zweimal differenzierbar sind und bestimmen Sie alle Ableitungen bis zum zweiten Grad.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{1+x^2} & x &\longmapsto \cos\cos x \\ h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & k : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{1+x^2} & x &\longmapsto \exp\frac{1}{x^2+1}. \end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie die Maxima und Minima der folgenden Funktionen. Handelt es sich um lokale oder um globale Extrema?

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sin x & x &\longmapsto \exp\frac{1}{x^2+1} \\ h : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} & k : [-2, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x| & x &\longmapsto \frac{1}{3}x^3 - x \end{aligned}$$

3. Sei $R > 0$. Sei $g :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}$ durch die konvergente Potenzreihe

$$g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

für $|x| < R$ gegeben. Sei $c \in \mathbb{R}$. Sei $f_c :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_c(x) := c + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad |x| < R$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f_c ist wohldefiniert.

(b) Die Funktion f_c ist differenzierbar und $f_c' = g$.

4. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} \tan :]-\pi/2, \pi/2[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ \tan(x) &:= \frac{\sin x}{\cos x} \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass tan wohldefiniert ist.

(b) Zeigen Sie, dass tan bijektiv ist und bezeichnen Sie die Inverse mit

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2, \pi/2[$$

Hinweis: Für die Injektivität berechnen Sie $\tan'$. Für die Surjektivität verwenden Sie den Zwischenwertsatz.

(c) Zeigen Sie, dass arctan differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(d) Bestimmen Sie die Extrema und Monotonieeigenschaften von arctan.

(e) Finden Sie eine Reihendarstellung von arctan auf dem Intervall $]-1,1[$.
Hinweis: Finden Sie zunächst eine Reihendarstellung von $\arctan'$ auf diesem Intervall und verwenden Sie Aufgabe 3.

5. **Multiple Choice Aufgaben:**

1. Sei $f\ :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{0\}$ monoton wachsend und differenzierbar. Dann gilt:

(a) $\frac{1}{f}$ ist monoton wachsend.

(b) $\frac{1}{f}$ ist monoton fallend.

(c) Keine Aussage gilt im Allgemeinen.

2. Sei $f\ :]a,b[\longrightarrow I$ streng monoton wachsend, bijektiv und differenzierbar. Dann gilt:

(a) f^{-1} ist monoton wachsend.

(b) f^{-1} ist monoton fallend.

(c) Keine Aussage gilt im Allgemeinen.

3. Die reellwertige Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist monoton fallend auf

(a) $[1,2]$.

(b) $[-2,-1]$.

(c) $[-2,-1] \cup [1,2]$.

4. Die reellwertige Funktion $x \mapsto |1-x|,\ x \in [-1,0]$

(a) nimmt ihr Maximum an.

(b) ist monoton steigend.

(c) ist differenzierbar.

5. Die reellwertige Funktion $x \mapsto \max\{0,x\},\ x \in \mathbb{R}$

(a) ist stetig.

(b) ist differenzierbar.

(c) ist monoton wachsend.

(d) nimmt ihr Minimum an.

6. Die reellwertige Funktion $x \mapsto \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$

(a) ist beschränkt.

(b) monoton wachsend auf $]-\infty, 0[$

(c) monoton wachsend auf $]-\infty, 0]$

(d) nimmt ihr Maximum an.

(e) nimmt ihr Minimum an.

Abgabe: Freitag, den 13. Dezember 2013 in der Übungsstunde oder vorher in den Fächern.